

КРАТКИЙ ОБЗОР МЕТОДОВ, ИСПОЛЬЗУЮЩИХСЯ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ

- Метод частиц в ячейке (particle-in-cell codes)
- Гибридные методы (hybrid codes)
- МГД методы (MHD codes)

МЕТОД ЧАСТИЦ В ЯЧЕЙКЕ

Это полностью кинетический подход, т.е. ионы и электроны описываются как частицы. Поведение плазмы определяется через взаимодействие между частицами и электромагнитным полем. Для расчета траекторий заряженных частиц используются уравнения движения (отдельно для ионов и электронов):

$$m_s \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = q_s (\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_s \times \mathbf{B}), \quad s = i, e. \quad (1)$$

Изменения электрического и магнитного поля определяются с помощью уравнений Максвелла:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c(\nabla \times \mathbf{B}) - 4\pi \mathbf{J}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c(\nabla \times \mathbf{E}), \quad (3)$$

$$\mathbf{J} = \sum_s n_s q_s \mathbf{v}_s, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_s n_s q_s, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5)$$

Выч. обл. покрывается сеткой, в каждой ячейке сетки может содержаться примерно $1 - 10^2$ макрочастиц. Каждая макрочастица внутри ячейки может иметь свои собственные параметры (координаты, скорость), но значения поля меняются только при переходе от одной ячейки к другой. Задача решается самосогласованно в 2 этапа: сначала для данного распределения частиц считаются новые средние значения параметров электромагнитного поля в каждой ячейке с помощью (2)–(4), а затем считается перемещение всех частиц под действием сил со стороны этого поля (1). Таким образом, самосогласованно находится распределение частиц в новый момент времени. Требуется выполнение условий (5) в начальный момент времени.

Достоинства метода: позволяет воспроизводить кинетические эффекты в бесстолкновительной плазме на малых масштабах.

Недостатки: сложность и требование значительных компьютерных ресурсов при расчетах в большой пространственной области, введение упрощающих предположений (искусственное занижение m_p/m_e и c).

Область применения: магнитное пересоединение, структура бесстолкновительных ударных волн, неустойчивости, распространение волн в плазме, плазма с функцией распределения существенно отличной от максвелловской.

ГИБРИДНЫЕ МЕТОДЫ

В этом методе ионы описываются как частицы, а электроны как "невесомая" жидкость ($m_e = 0$). Т.о. для расчета движения ионов можно использовать (1), а из безинерционности электронов получается обобщенный закон Ома (см. Лекции по Дополнительным главам МГД и физики плазмы):

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{V}_i \times \mathbf{B} + \frac{1}{4\pi ne}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \frac{1}{ne}\nabla p_e + \eta en(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_e). \quad (6)$$

Последний член определяет электрическое сопротивление, связанное со столкновениями электронов и ионов. Гибридный метод позволяет описывать явления на масштабах Дебаевского радиуса и гирорадиуса ионов, т.о. представляет некоторый промежуточный вариант между методом частиц в ячейке и МГД методами.

Достоинства метода: будучи относительно проще, чем метод частиц в ячейке, данный метод тем не менее позволяет исследовать некоторые кинетические явления. В частности, можно рассчитать как меняется функция распределения ионов в зависимости от действия различных внешних сил, рассмотреть взаимодействие между волнами и частицами, смоделировать развитие некоторых плазменных неустойчивостей.

Область применения гибридных методов в значительной степени совпадает с областью применения методов частиц в ячейке.

МГД МЕТОДЫ

Магнитогидродинамические методы используются для численного расчета в тех случаях, когда параметры плазмы и электромагнитного поля относительно медленно изменяются в пространстве и во времени. При этом предполагается, что кинетические эффекты, например, такие как развитие плазменных неустойчивостей, не существенны или могут быть достаточно просто описаны с помощью макроскопических коэффициентов (конечная проводимость, теплопроводность...). Уравнения МГД фактически представляют из себя законы сохранения (количества вещества, импульса, энергии), поэтому не возникает сомнений, что они должны выполняться на достаточно больших масштабах. В качестве

характерного пространственного масштаба обычно выбираются ларморовский

$$\rho_L = \frac{mv_{\perp}c}{eB}$$

и дебаевский

$$D = \left(\frac{kT_e}{4\pi ne^2} \right)^{1/2}$$

радиусы. К примеру, в спокойном солнечном ветре $\rho_L \simeq 100$ км, а $D \simeq 20$ м. Во внешней магнитосфере ларморовский радиус примерно того же порядка, в плазменном слое может увеличиваться до 1000 км.

УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Одножидкостные МГД уравнения в приближении сжимаемой бездиссипативной плазмы имеют вид:

$$\partial\rho/\partial t = -\nabla \bullet (\rho\mathbf{V}), \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{V}) = -\nabla \bullet \left[\rho\mathbf{V}\mathbf{V} + I\left(p + \frac{B^2}{8\pi}\right) - \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{4\pi} \right], \quad (8)$$

$$\partial e/\partial t = -\nabla \bullet \mathbf{q}, \quad e = \frac{\rho V^2}{2} + \frac{B^2}{8\pi} + \frac{p}{\gamma - 1},$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{V} \left(\frac{\rho V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} p \right) + \frac{1}{4\pi} [\mathbf{B} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B})], \quad \gamma = 5/3, \quad (9)$$

$$\partial\mathbf{B}/\partial t = \nabla \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}]. \quad (10)$$

Использовано математическое понятие диады $\mathbf{V}\mathbf{V}$:

$$\nabla(\mathbf{V}\mathbf{V}) = (\mathbf{V} \bullet \nabla)\mathbf{V} + \mathbf{V}(\nabla \bullet \mathbf{V}) = 1/2\nabla(V^2) - \mathbf{V} \times (\nabla \times \mathbf{V}) + \mathbf{V}(\nabla \bullet \mathbf{V}). \quad (11)$$

В декартовых координатах имеем $\nabla(\mathbf{V}\mathbf{V}) = \partial_i(V_i V_j) e_j$.

В трехмерной задаче получается система из 8 уравнений, содержащая 8 неизвестных. Хотя при выводе было косвенно использовано уравнение $div(B) = 0$, но вообще принято контролировать выполнение этого условия с помощью специальных методов (в противном случае, условие бездивергентности может нарушаться).

Данная форма записи уравнений МГД (6)-(9) является консервативной, т.к. в левой части уравнений находятся консервативные переменные (импульс и полная энергия, а, например, не скорость и температура). Для адиабатического течения вместо (8) можно использовать уравнение $\frac{d}{dt}(p/\rho^\gamma) = 0$. Однако в численном решении со скачками (ударными волнами) в этом случае может возникать существенная ошибка. Консервативные уравнения обеспечивают выполнение законов сохранения при уменьшении шага конечно-разностной сетки.

КАК ОБЕЗРАЗМЕРИВАТЬ УРАВНЕНИЯ?

Рассмотрим уравнение неразрывности

$$\partial\rho/\partial t = -\partial(\rho V)/\partial x.$$

Для обезразмеривания выделим размерные величины, характеризующие свойства нашей системы (ρ_o, V_o, t_o, x_o) :

$$\rho = \tilde{\rho}\rho_o, \quad V = \tilde{V}V_o, \quad t = \tilde{t}t_o, \quad x = \tilde{x}x_o.$$

Подставив в исходное уравнение, получаем:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{V_o t_o}{x_o} \frac{\partial(\tilde{\rho} \tilde{V})}{\partial \tilde{x}}.$$

БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ В МГД

Магнитное число Рейнольдса. При учете конечной проводимости плазмы (9) имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \Delta \mathbf{B}. \quad (12)$$

Магнитное число Рейнольдса $Re_m = (4\pi\sigma V_o x_o)/c^2$ показывает какой из членов в правой части является наиболее значимым: конвективный ($Re_m > 1$) или диффузионный ($Re_m < 1$). Обычно в космической плазме $Re_m \gg 1$, поэтому говорят, что магнитное поле "вморожено" в плазму.

Число Маха и Маха-Альвена. $M = V/V_c$ и $M_A = V/V_A$ – отношение скорости течения к скорости звука и к альвеновской скорости, соответственно.

$$V_c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}, \quad V_A = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}}$$

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Выбор численного метода зависит от типа рассчитываемой системы уравнений. Уравнение второго порядка в частных производных для двухмерной задачи в общем случае имеет вид:

$$a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \phi}{\partial x} + e \frac{\partial \phi}{\partial y} + f \phi + g = 0. \quad (13)$$

Если какие-то из коэффициентов a, b, c, d, e, f, g зависят от неизвестной функции ϕ , тогда уравнение (16) нелинейное. Формально (16) классифицируется следующим образом: гиперболические уравнения – при $b^2 - 4ac > 0$;
параболические уравнения – при $b^2 - 4ac = 0$;
эллиптические уравнения – при $b^2 - 4ac < 0$.

На практике известно, что уравнение переноса:

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial (F(\phi, x, t))}{\partial x} \quad (14)$$

является гиперболическим. Уравнение диффузии:

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} \quad (15)$$

является параболическим. Уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} = -\rho \quad (16)$$

является эллиптическим.

Исследуемая система уравнений МГД без включения вязких членов является гиперболической, а с вязкими членами - параболической. Известно, что уравнения, описывающие стационарное течение сжимаемой жидкости, являются гиперболическими в той области, где скорость течения превышает скорость звука, и эллиптическими в дозвуковой области. В этом случае говорят о течении смешанного типа.

Характеристики системы уравнений.

Характеристические поверхности (для трехмерной задачи) или характеристические линии (для двухмерной задачи) обычно совпадают с конусом Маха. В МГД они "свои" для каждой волновой моды. Рассмотрим простой пример. Возьмем одномерное волновое уравнение (ур-е колебаний струны):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},$$

где c - скорость распространения волны. Общее решение имеет вид: $\phi(x, t) = \phi_1(x - ct) + \phi_2(x + ct)$. Характеристики $x \pm ct = const$ определяют перемещение точек постоянной

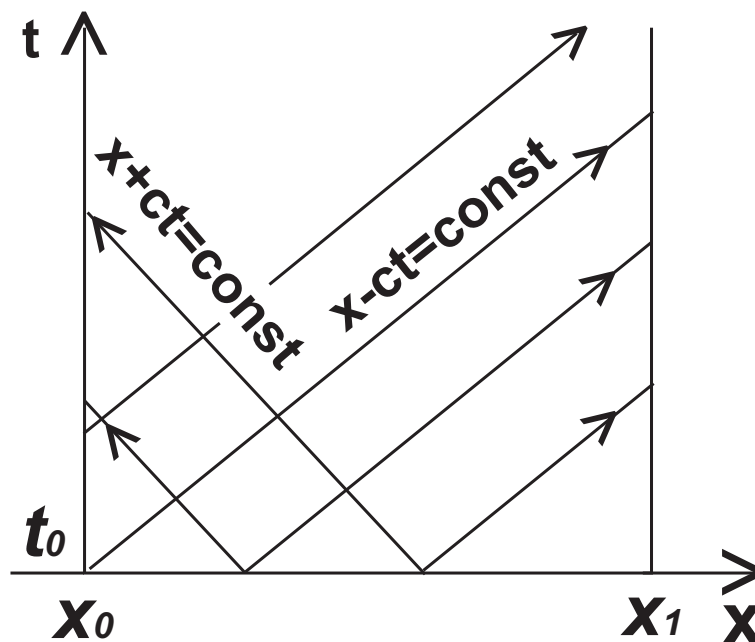


Рис. 1: Характеристики для одномерного волнового уравнения.

фазы.

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МГД. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Примерная последовательность действий при решении численной задачи:

1. Определить математическую модель, т.е. записать систему уравнений и задать граничные условия.
2. Выбрать подходящую систему координат. Координаты бывают: декартовы, сферические, цилиндрические, криволинейные ортогональные и неортогональные, лагранжевы...
3. Выбрать метод дискретизации. Бывают конечно-разностные методы, методы конечных объемов и методы конечных элементов. Теоретически все методы должны приводить к одному решению при достаточно густой сетке и малой численной вязкости. Выбрать подходящую численную схему.
4. Задать численную сетку и необходимые численные параметры (шаг по пространству и по времени, коэффициенты численной вязкости...).
5. Сформулировать начальные и граничные условия для дискретной численной задачи.
6. Написать код, исправить ошибки, сосчитать, варьируя значения численных параметров.
7. Протестировать полученное решение.

Рассмотрим для примера одномерное уравнение переноса:

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial(v\phi)}{\partial x}, \quad (17)$$

где $\phi(x, t)$ - это неизвестная функция (например, плотность), а скорость для простоты считаем заданной во всей области. Пусть заданы начальные и граничные условия $\phi(t_0) = \phi^0$, $\phi(x_L) = \phi_L$, $\phi(x_R) = \phi_R$. Будем решать эту задачу конечно-разностным методом в декартовых координатах. Введем равномерную сетку с шагом Δx по пространству и шагом Δt по времени. Т.е. $x_i = x_L + i\Delta x$ и $t^i = t_0 + i\Delta t$. Данную задачу можно решать численно с помощью разных численных схем, но правильно подобранный метод, корректные граничные условия и правильно написанная программа должны гарантировать, что численное решение будет сходиться к точному решению при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta t \rightarrow 0$. Это - требование **согласованности**. Чтобы записать (17) в дискретной форме надо аппроксимировать все производные. Предположим, что нам известны значения функции на шаге t^n для любых x_i : $\phi(x_i, t^n) = \phi_i^n$. Нужно выбрать численный метод для расчета значений функции на шаге t^{n+1} .

1. Аппроксимация производной $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$.

Разность вперед:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x}.$$

Разность назад:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x}.$$

Центральная разность:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x}.$$

2. Аппроксимация производной $\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$.

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_i \approx \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{t^{n+1} - t^n} = \frac{\phi_i^{n+1} - \phi_i^n}{\Delta t}.$$

Предположим, мы выбрали пространственную разность вперед. Получится конечно-разностная схема для решения (17):

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{v\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i+1}^n - \phi_i^n). \quad (18)$$

Пока предполагаем, что v - константа. Проанализируем устойчивость данного метода.

Метод дискретных возмущений: предположим, что найдено стационарное решение $\phi_i^n = 0$ для любых i , и введем малое возмущение ϵ в одной из точек. Тогда (18) превратится в:

$$\phi_i^{n+1} = \epsilon + \epsilon \frac{v\Delta t}{\Delta x} = \epsilon \left(1 + \frac{v\Delta t}{\Delta x}\right).$$

Схема будет устойчивой, если

$$\left|1 + \frac{v\Delta t}{\Delta x}\right| \leq 1. \quad (19)$$

Это возможно, только при $v \leq 0$. Т.о. данная схема может применяться исключительно в том случае, если скорость во всей области не меняет знак. Если $v \geq 0$, то надо использовать разности назад. Получится схема с разностями против потока.

Определение порядка точности с помощью разложения в ряд Тейлора.

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_i^n \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_i^n \Delta t^2 + O(\Delta t^3), \quad (20)$$

$$\phi_{i+1}^n = \phi_i^n + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i^n \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_i^n \Delta x^2 + O(\Delta x^3) \quad (21)$$

Подставим (20) и (21) в (18) и получим:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)_i^n \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)_i^n \Delta t^2 + O(\Delta t^3) = -\frac{v\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i^n \Delta x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_i^n \Delta x^2 + O(\Delta x^3) \right].$$

Сравним это уравнение с исходным уравнением переноса (17). Видно, что данный метод имеет первый порядок точности как по времени, так и по пространству.

Если мы возьмем центральную разность по x , то получим схему, которая называется явным методом Эйлера:

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{v\Delta t}{2\Delta x} (\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n). \quad (22)$$

Проанализируем устойчивость этой схемы по методу фон Неймана, используя фурье-компоненты. Пусть решение задачи на n -слое записывается в виде суммы фурье-компонент, каждая из которых имеет вид $\phi_i^n = \hat{\phi}^n \exp(ikx_i)$. Подставив в (22), получим:

$$\hat{\phi}^{n+1} = \hat{\phi}^n \left(1 - \frac{v\Delta t}{2\Delta x} (\exp(ik\Delta x) - \exp(-ik\Delta x)) \right) = \hat{\phi}^n \left(1 - \frac{v\Delta t}{\Delta x} i \sin(k\Delta x) \right).$$

Введем множитель перехода со слоя n на слой $n + 1$

$$\hat{\phi}^{n+1} = g\hat{\phi}^n, \quad (23)$$

где

$$g = \left(1 - \frac{v\Delta t}{\Delta x} i \sin(k\Delta x) \right).$$

Условие устойчивости может быть записано как $|g| \leq 1$. Однако

$$g^2 = gg^* = 1 + \left(\frac{v\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x) \right)^2 \geq 1.$$

Это означает, что данный метод безусловно неустойчивый при любом выборе шага Δt и Δx ! Существует ли возможность сделать метод с центральными разностями по пространству более устойчивым? Аппроксимируем по-другому временную производную $(\partial\phi)/(\partial t)$.

Схема Лакса:

$$\phi_i^{n+1} = \frac{1}{2}(\phi_{i+1}^n + \phi_{i-1}^n) - \frac{v\Delta t}{2\Delta x}(\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n). \quad (24)$$

Проанализировав ее устойчивость тем же методом, получим:

$$\hat{\phi}^{n+1} = \hat{\phi}^n \left(\cos(k\Delta x) - \frac{v\Delta t}{\Delta x} i \sin(k\Delta x) \right).$$

Тогда

$$gg^* = \cos^2(k\Delta x) + \left(\frac{v\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x) \right)^2 = 1 - \sin^2(k\Delta x) \left\{ 1 - \left(\frac{v\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right\}.$$

Условие устойчивости $|g| \leq 1$ выполнено, если

$$\left\{ 1 - \left(\frac{v\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \right\} \geq 0.$$

Следовательно

$$\frac{|v|\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

или

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|v|}. \quad (25)$$

Это - **условие устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви**. Если скорость в вычислительной области меняется, то требуется

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|v_{max}|}.$$

Другими словами, максимальная скорость распространения информации в системе должна быть меньше, чем численная скорость $\Delta x/\Delta t$. Вводится **число Куранта**:

$$C = \frac{|v|\Delta t}{\Delta x}.$$

Условие $C \leq 1$ является распространенным условием устойчивости для многих явных конечно-разностных схем.

НЕЯВНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА (17)

Если мы возьмем пространственные производные на шаге $n + 1$, то получим следующее разностное уравнение (в случае центральной разности):

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{v\Delta t}{2\Delta x} (\phi_{i+1}^{n+1} - \phi_{i-1}^{n+1}). \quad (26)$$

Это - **неявный метод Эйлера**. Анализируя устойчивость по методу фон Неймана, получим

$$g = \left(1 + \frac{v\Delta t}{\Delta x} i \sin(k\Delta x) \right)^{-1}.$$

Тогда

$$gg^* = \left[1 + \left(\frac{v\Delta t}{\Delta x} \sin(k\Delta x) \right)^2 \right]^{-1} \leq 1.$$

Т.о. данный метод является **безусловно устойчивым** при любом значении шага Δt ! Однако решение уравнения с помощью любого неявного метода является значительно более трудоемкой задачей. В матричной форме записи $A\phi^{n+1} = \phi^n$, где для метода (26) A - это трехдиагональная матрица. Т.е. на каждом шаге по времени требуется решать систему линейных (а, в общем случае для меняющейся скорости, нелинейных) уравнений. Зато, величина шага может быть выбрана значительно большей, чем в явных методах.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} \quad (27)$$

Как численно аппроксимировать производную

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) ?$$

Аппроксимируем, например, одну производную с помощью разности вперед, а другую с помощью разности назад:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i \approx \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i+1} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_i}{\Delta x} \approx \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{(\Delta x)^2}.$$

Такую же формулу можно получить с помощью 2 центральных разностей, используя полуцелые индексы:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i \approx \frac{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i+1/2} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{i-1/2}}{\Delta x} \approx \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{(\Delta x)^2}.$$

Можно показать, что такая аппроксимация имеет 2-ой порядок точности.

Запишем явный метод 1-ого порядка точности по t :

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + \frac{\mu\Delta t}{\Delta x^2}(\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n). \quad (28)$$

Определим устойчивость этой схемы

$$\hat{\phi}^{n+1} = \hat{\phi}^n \left[1 + \frac{\mu\Delta t}{\Delta x^2}(\exp(ik\Delta x) - 2 + \exp(-ik\Delta x)) \right] = \hat{\phi}^n \left[1 + 2\frac{\mu\Delta t}{\Delta x^2}(\cos(k\Delta x) - 1) \right].$$

Т.о. множитель перехода на следующий временной слой имеет вид:

$$g = 1 + 2\frac{\mu\Delta t}{\Delta x^2}(\cos(k\Delta x) - 1) = 1 - 4\frac{\mu\Delta t}{\Delta x^2}\sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right).$$

Критерий устойчивости фон Неймана означает $|g| \leq 1$. Это условие должно быть справедливо для любого волнового числа k , поэтому получаем

$$-4\frac{\mu\Delta t}{\Delta x^2} \geq -2$$

или

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\mu}.$$

ЯВНЫЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ПО ВРЕМЕНИ

Рассмотренные ранее схемы имели 1-ый порядок по времени, т.к. на каждом шаге для вычисления значений ϕ^{n+1} использовались значения только на одном предыдущем слое ϕ^n . Для создания схем второго порядка точности и выше нужно или использовать значения на более ранних слоях, или вводить промежуточные слои между n и $n + 1$.

Двухшаговая схема Лакса-Вендроффа.

Решаем гиперболическое уравнение в виде

$$\frac{\partial\phi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial F(\phi, x, t)}{\partial x}. \quad (29)$$

Зная ϕ_i^n , можно найти $F_i^n = F(\phi_i^n)$.

Прежде чем считать значения на шаге $n + 1$, надо сосчитать промежуточный шаг $n + 1/2$.

$$\phi_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2}(\phi_{i+1}^n + \phi_i^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(F_{i+1}^n - F_i^n) \quad (30)$$

Находим $F_{i+1/2}^{n+1/2} = F(\phi_{i+1/2}^{n+1/2})$ и считаем второй полу-шаг:

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2}). \quad (31)$$

Покажем, что это метод 2-ого порядка точности по t и по x . Введем вспомогательные операторы $\mu_x \phi_i = (\phi_{i+1/2} + \phi_{i-1/2})/2$ и $\delta_x \phi_i = \phi_{i+1/2} - \phi_{i-1/2}$. Тогда (30) и (31) можно записать с помощью новых операторов

$$\phi_{i+1/2}^{n+1/2} = \mu_x \phi_{i+1/2}^n - \frac{1}{2} q \delta_x F_{i+1/2}^n, \quad \phi_i^{n+1} = \phi_i^n - q \delta_x F_i^{n+1/2}.$$

Здесь $q = \Delta t / \Delta x$.

С помощью разложения в ряды Тейлора получим

$$\begin{aligned} \mu_x \phi_i &= \phi_i + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \Delta x^2 + O(\Delta x^4) \\ \delta_x \phi_i &= \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{24} \frac{\partial^3 \phi_i}{\partial x^3} \Delta x^3 + O(\Delta x^4) \end{aligned} \quad (32)$$

Для удобства используем операторы

$$d_t \equiv \Delta t \frac{\partial}{\partial t}, \quad d_x \equiv \Delta x \frac{\partial}{\partial x}, \quad d_{tt} \equiv \Delta t^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Считаем $O(\Delta t) = O(\Delta x) = O(\Delta)$. Тогда из уравнения (29) следует

$$d_t \phi = -q d_x F. \quad (33)$$

Используя (30) - (33) получим:

$$\begin{aligned} \phi_i^{n+1} &= \phi_i^n - q (d_x F_i^{n+1/2} + O(\Delta^3)) = \phi_i^n + d_t \phi_i^{n+1/2} + O(\Delta^3) = \\ &= \phi_i^n + d_t (\phi_i^n + \frac{1}{2} d_t \phi_i^n) + O(\Delta^3) = \phi_i^n + d_t \phi_i^n + \frac{1}{2} d_t^2 \phi_i^n + O(\Delta^3). \end{aligned}$$

Таким образом, с точностью до членов второго порядка полученная формула совпадает с разложением в ряд Тейлора в окрестности ϕ^n .

Определение оператора перехода и условия устойчивости для схемы Лакса-Вендроффа. Вернемся к более простому уравнению переноса (17). В случае постоянной скорости имеем

$$\begin{aligned} \phi_i^{n+1} &= \phi_i^n - \frac{\Delta t V}{\Delta x} (\phi_{i+1/2}^{n+1/2} - \phi_{i-1/2}^{n+1/2}) = \\ &= \phi_i^n - C \left[\frac{1}{2} (\phi_{i+1}^n + \phi_i^n) - \frac{C}{2} (\phi_{i+1}^n - \phi_i^n) - \frac{1}{2} (\phi_i^n + \phi_{i-1}^n) + \frac{C}{2} (\phi_i^n - \phi_{i-1}^n) \right] = \\ &= \phi_i^n - \frac{C}{2} (\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n) + \frac{C^2}{2} (\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n), \end{aligned} \quad (34)$$

где C - число Куранта.

Можно по-другому показать, что схема имеет 2-й порядок точности, используя разложение:

$$\phi_{i\pm 1}^n = \phi_i^n \pm \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Delta x^2 \pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Delta x^3.$$

Используя метод фон Неймана можно показать, что множитель перехода имеет вид

$$g = 1 - iC \sin(k\Delta x) + C^2 [\cos(k\Delta x) - 1].$$

$$gg^* = [1 + C^2(\cos(k\Delta x) - 1)]^2 + C^2 \sin^2(k\Delta x) = 1 - C^2(1 - C^2)[1 - \cos(k\Delta x)]^2.$$

Множитель перехода меньше или равен 1, если $C \leq 1$. Т.е. снова условие Куранта-Фридрихса-Леви.

Схема leapfrog или чехарда со средней точкой.

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^{n-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n). \quad (35)$$

Это тоже схема 2-ого порядка, т.к. она центрирована по времени и по пространству. Однако для ее использования требуется, чтобы значения функции были известны на 2 слоях по времени ϕ^0 и ϕ^1 . Для этой цели на первом шаге можно использовать более простую схему 1-ого порядка, но в некоторых задачах это может снизить точность решения. Условие устойчивости данной схемы: $C \leq 1$.

В схемах более высокого порядка точности по времени вводятся дополнительные промежуточные слои, что соответственно приводит к увеличению стоимости расчетов (т.е. к большим затратам машинного времени).

ВВЕДЕНИЕ ЯВНОЙ ЧИСЛЕННОЙ ВЯЗКОСТИ В КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ

Введение явной численной вязкости иногда является необходимым для обеспечения устойчивости решения особенно там, где существуют большие градиенты рассчитываемых функций. Например, в местах формирования разрывов. Если рассчитывается гиперболическое уравнение (29) с помощью метода 2-ого или 3-его порядка точности, то введение численной вязкости в виде члена 2-ого порядка формально снижает порядок точности полученного решения. Влияние численной вязкости стараются уменьшить, уменьшая коэффициент перед вязким членом или выбирая более эффективную форму представления. Рассмотрим 3 варианта.

† Простой диффузионный член 2-ого порядка.

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_i \approx (\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1})$$

Рассмотрим уравнение переноса с искусственной вязкостью

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -v \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2},$$

где μ - коэффициент, который можно определить с помощью подбора. В конечно-разностной аппроксимации данный диффузионный член имеет вид:

$$\frac{\mu \Delta t}{\Delta x^2} (\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}).$$

Величина μ должна быть ограничена

$$\mu \leq \frac{\Delta x^2}{2\Delta t},$$

что аналогично условию устойчивости, полученному при решении диффузионного уравнения. Влияние вязкого члена оценивается с помощью числа Рейнольдса $Re = (v\Delta x)/\mu$ (число Рейнольдса определяется как отношение коэффициентов при конвективном и диффузионном членах).

† **Модернизированный диффузионный член 2-ого порядка**, введенный Русановым в 1961 для расчета течений с ударными волнами.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Vc \frac{\partial \phi}{\partial x} \right),$$

где $Vc = |V| + c$ - сумма модуля скорости потока и скорости звука. В МГД можно, например, использовать $Vc = |V| + 0.5c + 0.5V_A$, т.е. полусумму скорости звука и альвеновской скорости. В конечно-разностной аппроксимации данный член можно представить в виде

$$\frac{\mu \Delta t}{\Delta x^2} (\phi_{i+1}(Vc_{i+1} + Vc_i) - \phi_i(Vc_{i+1} + 2Vc_i + Vc_{i-1}) + \phi_{i-1}(Vc_i + Vc_{i-1})).$$

Число Рейнольдса оценивается как $Re \approx (v\Delta x)/(\mu Vc)$.

† **Диффузионный член 4-ого порядка точности.**

$$\delta_x^4 \phi_i = \delta_x^2 (\delta_x^2 \phi_i) = \phi_{i+2} - 4\phi_{i+1} + 6\phi_i - 4\phi_{i-1} + \phi_{i-2}$$

Используя в качестве искусственной вязкости только этот член, можно сохранить высокий порядок точности численной схемы. Однако решение будет устойчиво только в небольшом интервале значений множителя μ .

ОБОБЩЕНИЕ НА СЛУЧАЙ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ

Для большинства численных схем обобщение на случай двух и более измерений не представляет сложности. В некоторых случаях нужно позаботиться о согласованности между соседними узлами сетки.

Решаем двумерное уравнение

$$\frac{\partial \phi(x, y, t)}{\partial t} = - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \right).$$

Рассмотрим 2 схемы: схему Лакса и одну из разновидностей схемы Лакса-Вендроффа.

Схема Лакса.

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4} \left(\phi_{i+1,j}^n + \phi_{i-1,j}^n + \phi_{i,j+1}^n + \phi_{i,j-1}^n \right) - \Delta t \left(\frac{F_{i+1,j}^n - F_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{G_{i,j+1}^n - G_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) \quad (36)$$

Т.о. численное решение в точке (i, j) на $n + 1$ слое определяется значениями в точках $(i + 1, j)$, $(i - 1, j)$, $(i, j + 1)$, $(i, j - 1)$ на слое n . Т.е. решения в точке (i, j) на слое n и слое $n + 1$ не связаны друг с другом. Фактически могут развиваться 2 независимых решения, каждое на своей половине узлов сетки (представьте себе трехмерную шахматную доску).

Двухшаговая схема Лакса-Вендроффа.

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}^{n+1/2} &= \frac{1}{4} \left(\phi_{i+1,j}^n + \phi_{i-1,j}^n + \phi_{i,j+1}^n + \phi_{i,j-1}^n \right) - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{F_{i+1,j}^n - F_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{G_{i,j+1}^n - G_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right) \\ \phi_{i,j}^{n+1} &= \phi_{i,j}^n - \Delta t \left(\frac{F_{i+1,j}^{n+1/2} - F_{i-1,j}^{n+1/2}}{2\Delta x} + \frac{G_{i,j+1}^{n+1/2} - G_{i,j-1}^{n+1/2}}{2\Delta y} \right) \end{aligned} \quad (37)$$

Условие устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви в N-мерном пространстве имеет вид (предполагая $\Delta x = \Delta y = \Delta$):

$$\Delta t \leq \frac{\Delta}{|v| \sqrt{N}},$$

где $|v|$ - наибольшее возможное значение скорости распространения возмущений в вычислительной области. В МГД можно считать, что наибольшая скорость равна $\sqrt{v_x^2 + v_y^2} + v_f$, где v_f - скорость быстрой магнитозвуковой волны ($\sqrt{v_A^2 + c^2}$). В случае, когда $\Delta x \neq \Delta y$, двумерное число Куранта записывается как

$$C_{2D} = \left(\sqrt{v_x^2 + v_y^2} + v_f \right) \Delta t \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta x \Delta y}.$$

Соответственно, условие устойчивости $C_{2D} \leq 1$.

МЕТОДЫ КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ

Если в конечно-разностных методах значения неизвестных функций рассчитываются на узлах решетки, то в методе конечных объемов (МКО) используются значения функций внутри элементарных объемчиков. Рисунок 2 показывает характерные численные сетки для метода конечных разностей и для метода конечных объемов.

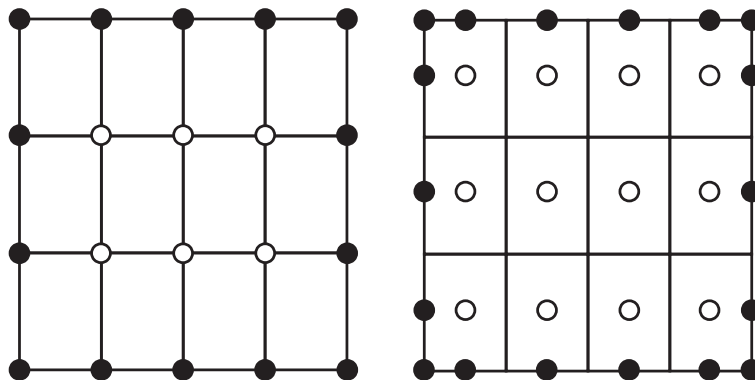


Рис. 2: Примеры численных сеток для метода конечных разностей (слева) и для метода конечных объемов (справа). Внутренние точки показаны белыми кружками, граничные точки - черными.

Можно сказать, что в этих методах уравнения записываются не в дифференциальной, а в интегральной форме. Например, вместо

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla(\rho \vec{v})$$

будет

$$\int_V \rho dV = - \int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$

Т.о. повышается точность выполнения законов сохранения, особенно на сложно-структурированной сетке.

Изучим, как работает МКО, на примере **ТВД схем Лакса-Фридрихса**. TVD – **Total Variation Diminishing** (Gábor Tóth, Computational magnetohydrodynamics).

ТВД Лакса-Фридрихса I порядка.

Рассмотрим опять одномерную задачу

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial F(\phi, x, t)}{\partial x}.$$

Схема имеет вид

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n) + \frac{1}{2} (\Psi_{j+1/2}^n - \Psi_{j-1/2}^n), \quad (38)$$

где $F_{j+1/2} = (F_j + F_{j+1})/2$, а $\Psi_{j+1/2} = \phi_{j+1} - \phi_j$. В декартовых координатах такая схема идентична конечно-разностной схеме Лакса. Понятно, что разность $(\Psi_{j+1/2} - \Psi_{j-1/2})$ - это просто диффузионный член (явная численная вязкость), типа $\nu \nabla^2 \phi$ с коэффициентом диффузии $\nu \propto (\Delta x)^2 / \Delta t$. Чтобы уменьшить численную вязкость, можно взять

$$\Psi_{j+1/2} = \frac{\Delta t}{\Delta x} v_{j+1/2}^{max} (\phi_{j+1} - \phi_j), \quad (39)$$

где v^{max} - максимальная локальная скорость. Условием устойчивости, также как и для конечно-разностных схем, является ограничение на число Куранта $C \leq 1$.

Оказывается, благодаря диффузионному члену данная схема в определенных случаях может совпадать со схемой с разностями против потока. Рассмотрим для примера одномерное уравнение неразрывности (17). Для фиксированной скорости считаем, что $v^{max} = |v|$. Тогда

$$\begin{aligned} \phi_j^{n+1} &= \phi_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} ((\phi v)_{j+1}^n - (\phi v)_{j-1}^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta x} |v| (\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n) = \\ &= \phi_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \begin{cases} (\phi v)_j^n - (\phi v)_{j-1}^n, & \text{для } v \geq 0 \\ (\phi v)_{j+1}^n - (\phi v)_j^n, & \text{для } v < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (40)$$

TVD Лакса-Фридрихса II порядка.

Второй порядок точности достигается линейной аппроксимацией значений функции и потоков на границах между ячейками. Значения функции на границе $x_{j+1/2}$ могут быть линейно экстраполированы слева и справа

$$\begin{aligned} \phi_{j+1/2}^L &= \phi_j + \frac{1}{2} \overline{\Delta \phi}_j, \\ \phi_{j+1/2}^R &= \phi_{j+1} - \frac{1}{2} \overline{\Delta \phi}_{j+1}. \end{aligned} \quad (41)$$

Оператор $\overline{\Delta \phi}$ - это "ограничитель угла наклона" (slope limiter). Несколько форм его представления будут рассмотрены ниже.

На границах между ячейками считается поток

$$F_{j+1/2} = \frac{1}{2} (F(\phi_{j+1/2}^L) + F(\phi_{j+1/2}^R)) \quad (42)$$

и вязкий член

$$\Psi_{j+1/2} = \frac{\Delta t}{\Delta x} v_{j+1/2}^{max} (\phi_{j+1/2}^R - \phi_{j+1/2}^L). \quad (43)$$

В общем случае, v^{max} - это максимальная скорость распространения возмущений:

$$v_{j+1/2}^{max} = \max[v^{max}(\phi^R), v^{max}(\phi^L)] \quad (44)$$

или

$$v_{j+1/2}^{max} = v^{max}(\phi^{LR}), \quad (45)$$

где ϕ^{LR} - среднее между ϕ^L и ϕ^R .

Как обычно, для схемы второго порядка существует промежуточный слой по времени

$$\phi_j^{n+1/2} = \phi_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F(\phi_j^n + \frac{1}{2} \overline{\Delta \phi}_j^n) - F(\phi_j^n - \frac{1}{2} \overline{\Delta \phi}_j^n)]. \quad (46)$$

Далее находим

$$\begin{aligned}\phi_{j+1/2}^L &= \phi_j^{n+1/2} + \frac{1}{2}\overline{\Delta\phi_j^n}, \\ \phi_{j+1/2}^R &= \phi_{j+1}^{n+1/2} - \frac{1}{2}\overline{\Delta\phi_{j+1}^n}.\end{aligned}\quad (47)$$

Используем (42) и (43) и, наконец, считаем

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2} - F_{j-1/2}) + \frac{1}{2} (\Psi_{j+1/2} - \Psi_{j-1/2}). \quad (48)$$

Ограничители угла наклона (slope limiters)

Основным требованием для **всех TVD схем** является выполнение условия

$$\sum_j |\phi_{j+1}^{n+1} - \phi_j^{n+1}| \leq \sum_j |\phi_{j+1}^n - \phi_j^n|.$$

Такие схемы создают сглаживание больших градиентов в местах разрывов, но "ценой" за это может быть первый порядок точности на этих участках.

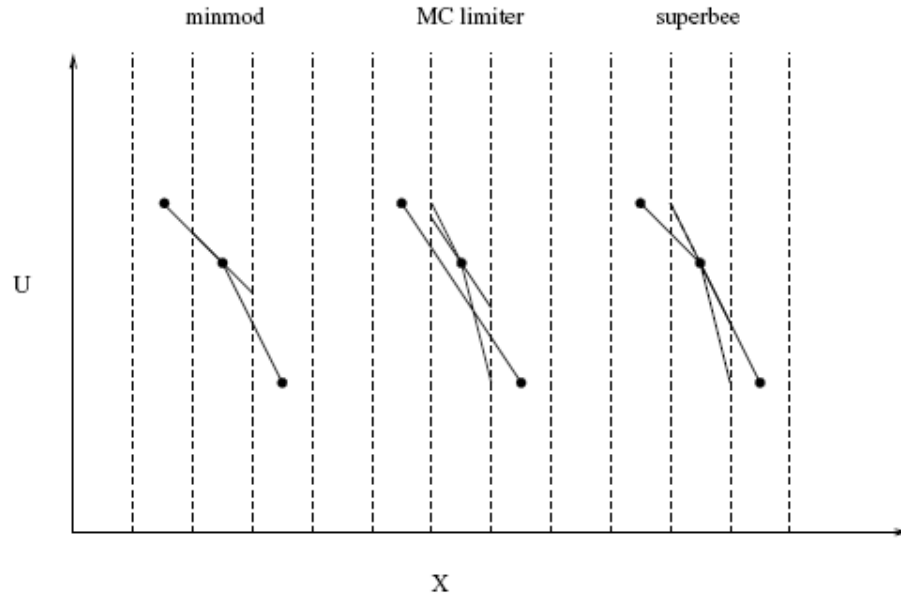


Рис. 3: Три различных оператора, ограничивающие угол наклона, действуют на одну и ту же конфигурацию. Каждый оператор из нескольких оценочных наклонов (тонкие линии) выбирает один (толстая линия).

Т.о., если локально возникают большие значения градиентов ϕ , надо их как-то ограничивать. Наиболее известны три вида ограничителей:

1. minmod

$$\overline{\Delta\phi_j} = \minmod(\Delta\phi_{j-1/2}, \Delta\phi_{j+1/2}) \quad (49)$$

2. Woodward или monotonized central difference

$$\overline{\Delta\phi_j} = \minmod(2\Delta\phi_{j-1/2}, 2\Delta\phi_{j+1/2}, \frac{1}{2}\Delta\phi_{j-1/2} + \frac{1}{2}\Delta\phi_{j+1/2}) \quad (50)$$

3. superbee

$$\overline{\Delta\phi_j} = s \max[0, \min(2|\Delta\phi_{j+1/2}|, s\Delta\phi_{j-1/2}), \min(|\Delta\phi_{j+1/2}|, 2s\Delta\phi_{j-1/2})], \quad (51)$$

где $\Delta\phi_{j+1/2} = \phi_{j+1} - \phi_j$, а $s = \text{sgn}(\Delta\phi_{j+1/2})$. Функция "минмод" определяется для $n > 1$ как

$$\text{minmod}(w_1, w_2 \dots w_n) = \text{sgn}(w_1) \max[0, \min(|w_1|, \text{sgn}(w_1)w_2, \dots, \text{sgn}(w_1)w_n)]. \quad (52)$$

Если, например, мы рассмотрим случай, когда w_1 и w_2 имеют разные знаки, то $\text{minmod}(w_1, w_2) = 0$. Это должно ограничивать развитие численных неустойчивостей. Рисунок 3 иллюстрирует действие трех ограничителей.

При решении многомерных задач можно использовать расщепление оператора: $\vec{\phi}^{n+2} = L_x L_y L_z L_z L_y L_x \vec{\phi}^n$, где L_i – соответствующие одномерные операторы.

МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Метод конечных элементов (МКЭ) имеет сходство с методом конечных объемов. Выч. область также делится на множество дискретных объемчиков, которые могут быть достаточно сложной формы. Если значения функции на узлах решетки известны, то значения в любой другой точке получаются в виде комбинации, состоящей из значений в соседних узлах, домноженных на специально подобранные весовые функции $\xi_j(\vec{x})$.

Пример МКЭ: метод Галеркина.

Достоинства: возможность решать задачи сколь угодно сложной геометрии и при любой численной сетке.

Недостатки: сложность реализации и требование больших вычислительных ресурсов.

В некоторой заданной области G в плоскости (x, y) требуется найти функцию $\phi(x, y)$, удовлетворяющую уравнению $\Delta\phi(x, y) = \rho(x, y)$ ($\rho(x, y)$ – известная функция). На границе области заданы граничные условия. Построим триангуляцию области G , т.е. покроем ее сетью треугольников, каждые два из которых либо совсем не пересекаются, либо имеют только одну общую вершину, либо – одну общую сторону (Федоренко, Введение в вычислительную физику).

Рассмотрим один из треугольников и сеточную функцию, определенную в его вершинах с индексами (1,2,3). Сеточная функция имеет значения ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 . Построим в треугольнике интерполяционный базис из трех функций $\xi_1(x, y), \xi_2(x, y), \xi_3(x, y)$, линейных по x и y и равных единице в своей вершине треугольника и нулю в остальных двух. Можно определить значение $\phi(x, y)$ в любой точке внутри треугольника по формуле

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^3 \phi_i \xi_i(x, y). \quad (53)$$

Каждый такой треугольник, оснащенный своим базисом, называют **конечным элементом**. Внутри треугольника можно ввести свои координаты (λ, μ) , таким образом,

чтобы вершины треугольника имели значения $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Тогда функции интерполяционного базиса имеют вид

$$\xi_1(\lambda, \mu) = 1 - \lambda - \mu, \quad \xi_2(\lambda, \mu) = \lambda, \quad \xi_3(\lambda, \mu) = \mu.$$

Существует линейное соответствие между новыми и старыми координатами

$$\lambda = a_1 + a_{11}x + a_{12}y, \quad \mu = a_2 + a_{21}x + a_{22}y,$$

и обратное к нему.

Легко вычисляются производные интерполированной функции:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial x} = (\phi_2 - \phi_1)a_{11} + (\phi_3 - \phi_1)a_{21}.$$

Интегрирование по элементарному треугольнику сводится к интегрированию по треугольнику в преобразованных координатах (λ, μ) с последующим умножением на определитель преобразования координат (постоянный в силу линейности отображения).

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА СВЕРХ-РЕЛАКСАЦИИ

При численном решении уравнений МГД необходимо контролировать выполнение условия бездивергентности $\nabla \cdot \vec{B} = 0$. С этой целью в основную программу может быть добавлена специальная подпрограмма, кот. будет вносить небольшую поправку в рассчитываемые значения вектора магнитного поля. Надо найти скалярный потенциал U , кот. соответствует появившимся искусственным "магнитным зарядам".

$$\Delta U + \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (54)$$

Затем, вводится поправка к значению напряженности поля:

$$\vec{B}' = \vec{B} + \nabla U \quad (55)$$

Решение (54) может быть найдено по методу simultaneous over-relaxation (SOR).

Основная идея метода SOR состоит в том, что вместо уравнения $LU = \rho$ (где $L \equiv \Delta$, $\rho \equiv -\nabla \cdot \vec{B}$) решается уравнение $\frac{\partial U}{\partial t} = LU - \rho$.

При решении методом релаксации по времени при $t \rightarrow \infty$ численное решение U сходится к точному решению. Практически это выглядит следующим образом. На сетке (54) обычно имеет вид:

$$a_{j,l}U_{j+1,l} + b_{j,l}U_{j-1,l} + c_{j,l}U_{j,l+1} + d_{j,l}U_{j,l-1} + e_{j,l}U_{j,l} = f_{j,l}. \quad (56)$$

При наиболее простой разностной аппроксимации в декартовых координатах $a = b = c = d = 1$, $e = -4$.

Введем вектор ошибки:

$$\zeta_{j,l} = a_{j,l}U_{j+1,l} + b_{j,l}U_{j-1,l} + c_{j,l}U_{j,l+1} + d_{j,l}U_{j,l-1} + e_{j,l}U_{j,l} - f_{j,l}.$$

Находим новое решение итерациями

$$U_{j,l}^{new} = U_{j,l}^{old} - \omega \frac{\zeta_{j,l}}{e_{j,l}}.$$

Здесь, ω – это параметр, который выбирают для лучшей сходимости в диапазоне от 1 до 2. Можно разделить сетку на четные и нечетные индексы $(j+l)$ и считать по очереди: для 1-ой итерации брать нечетные, для 2-ой брать четные с новыми нечетными. Рекомендуют брать

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_{1/2} = 1/(1 - 0.5\rho_{Jacobi}^2), \quad \omega_{n+1/2} = 1/(1 - 0.25\rho_{Jacobi}^2\omega_n),$$

где

$$\rho_{Jacobi} = \frac{\cos(\pi/J) + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 \cos(\pi/L)}{1 + \left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2},$$

$J \times L$ – размер сетки. При больших n, J, L : $\omega \rightarrow 2$.

Критерий сходимости - малая величина $|\zeta|$. Например: $|\zeta_n/\zeta_0| < 10^{-5}$. Обычно требуется $10^2 - 10^3$ итераций. Предполагается достаточно выполнять коррекцию вектора \vec{B} на каждом 3-5 шаге основной программы. Естественно, что для проверки всегда можно сосчитать величину $\nabla \cdot \vec{B}$.

МЕТОД УЧЕТА ТРЕБОВАНИЯ $DIV(\vec{B}) = 0$ С ПОМОЩЬЮ ВВЕДЕНИЯ МАГНИТНЫХ МОНОПОЛЕЙ

Оказывается, условие $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ может быть выполнено, если в систему уравнений идеальной МГД включить члены пропорциональные $div(\vec{B})$ (Powell, 1994). Согласно Jauhunen (J. Comput. Phys., 2000) уравнения МГД, полученные при предположении существования магнитных монополей, имеют вид:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V} \vec{B} - \vec{B} \vec{V}) = -\vec{V}(\nabla \cdot \vec{B}), \quad (57)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0, \quad (58)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) + \nabla \cdot \left[\rho \vec{V} \vec{V} + I \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) - \frac{\vec{B} \vec{B}}{4\pi} \right] = 0, \quad (59)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{q} = 0. \quad (60)$$

В (57) и (59) использовано диадное произведение, описанное в разделе "Уравнения МГД". Домножим (57) на $\nabla \cdot$. Получается

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{B}) + \nabla \cdot (\vec{V} \nabla \cdot \vec{B}) = 0. \quad (61)$$

Т.о. $div(\vec{B})$ переносится потоком как обычная скалярная величина. Если задание граничных и начальных условий обеспечивает выполнение требования $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, то это требование выполняется и в дальнейшем.

КОНФИГУРАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Самое простое – это решать задачу в декартовых координатах на прямоугольной сетке. Но на практике вычислительная область может иметь весьма сложную форму. В этом случае можно использовать два разных подхода:

1. Перейти в другую систему координат, взять сетку более сложной формы.
2. Использовать "адаптированную декартову сетку", т.е. сетку с меняющимся разрешением (см. далее).

Численные сетки можно разделить на 3 типа. **Структурированные** или **регулярные** сетки состоят из нескольких семейств линий. Линии внутри одного семейства никогда не пересекаются, а с линиями из других семейств пересекаются не более одного раза. В **структурированных по блокам** сетках вся вычислительная область разбивается на несколько блоков внутри которых структура сохраняется. **Неструктурированные** сетки используются при наиболее сложной геометрии задачи.

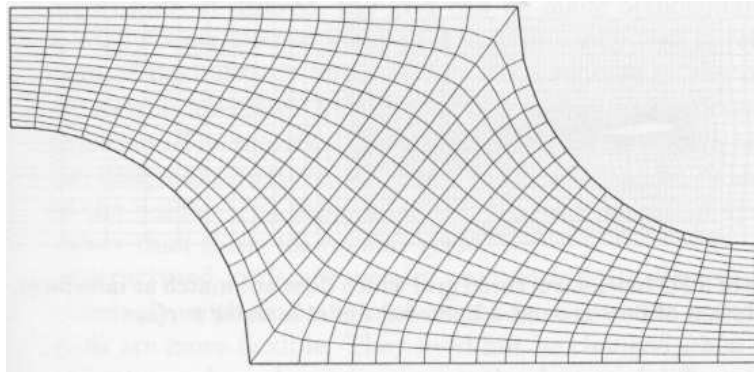


Рис. 4: Пример структурированной неортогональной сетки для гидродинамической задачи.

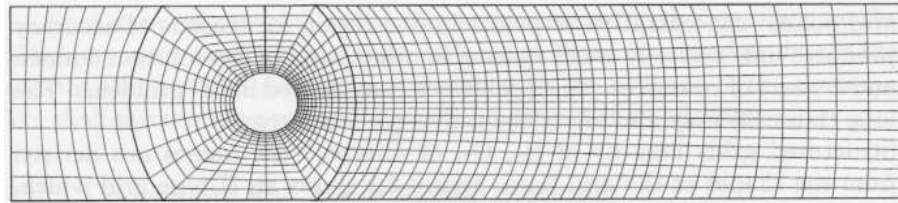


Рис. 5: Пример сетки, структурированной по блокам, для расчета течения вокруг цилиндра в канале.

Шаг сетки рекомендуется выбирать таким образом, чтобы в области с большими градиентами МГД параметров разрешение было максимальным (шаг минимальным). Однако шаг не может меняться произвольным образом. Например, чтобы перейти от равномерной сетки с координатами $r_1(i)$ к новой сетке с координатами $r_2(i)$, такими что

$$\frac{\partial r_2}{\partial r_1} = 1 + \Delta_r r_1, \quad r_2(0) = r_1(0) = r_0$$

требуется следующее преобразование. Новые координаты выражаются через старые как

$$r_2 = \frac{\Delta_r}{2} (r_1^2 - r_0^2) + r_1.$$

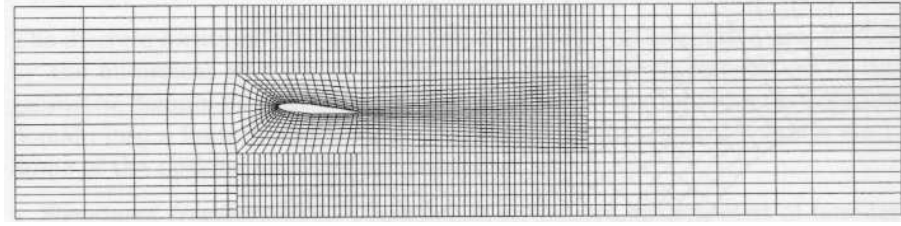


Рис. 6: Другой пример сетки, структурированной по блокам.

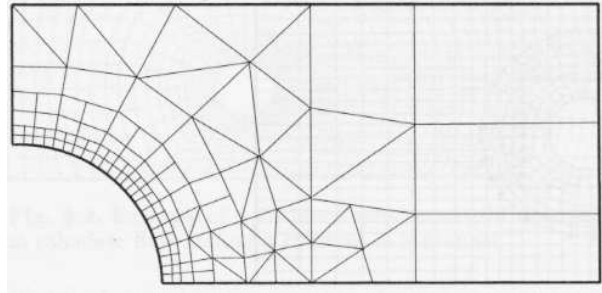


Рис. 7: Пример неструктурированной сетки.

Определим производную функции f в новых координатах:

$$\frac{\partial f}{\partial r_2} = \frac{\partial f}{\partial r_1} \left(\frac{\partial r_2}{\partial r_1} \right)^{-1}. \quad (62)$$

Шаг неравномерной сетки увеличивается линейно с увеличением координаты $\Delta_i = \Delta_0(1 + \Delta_r i)$, где Δ_0 – шаг на равномерной сетке. При переходе к новым координатам надо использовать формулу

$$\frac{\Delta f}{\Delta r_2} = \frac{\Delta f}{\Delta r_1} (1 + \Delta_r i)^{-1},$$

что в конечно-разностной форме аналогично (62).

В настоящее время часто используют **адаптированную декартову сетку** (обычно не в конечно-разностных схемах, а, например, в методе конечных объемов). Если нужно увеличить разрешение в какой-то локальной области, то "прямоугольник разбивают на 4 равные части" (в двухмерной задаче). Дальше "маленький прямоугольник" можно разбить еще на 4 части, но при этом нельзя резко переходить от большого разрешения к маленькому (см. рис. 9).

Одним из способов тестирования полученного численного решения является расчет той же самой задачи на сетке с удвоенным разрешением. Если все правильно, то происходят лишь небольшие локальные изменения решения.

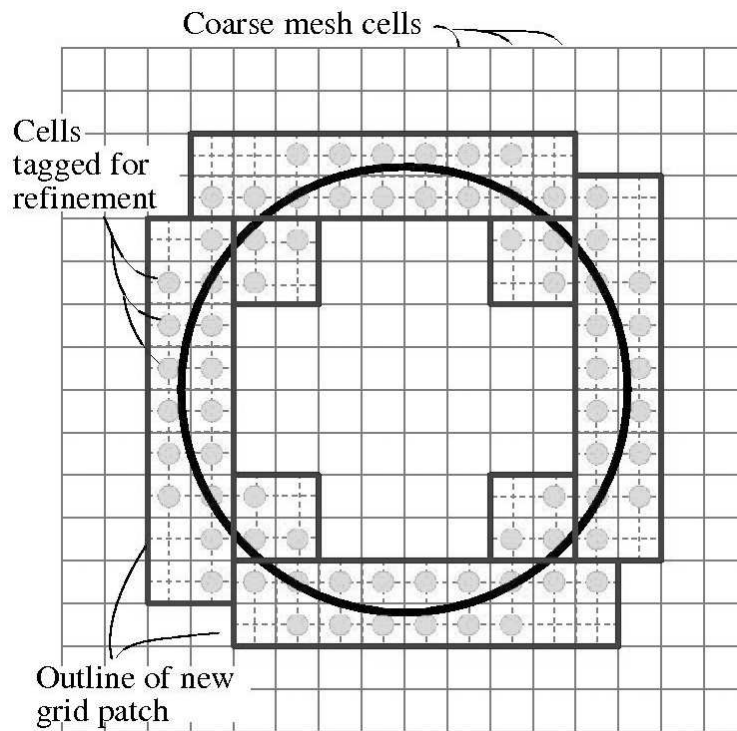


Рис. 8: Пример адаптированной декартовой сетки. Окружность является границей, вблизи которой используют сетку с разрешением в несколько раз большим.

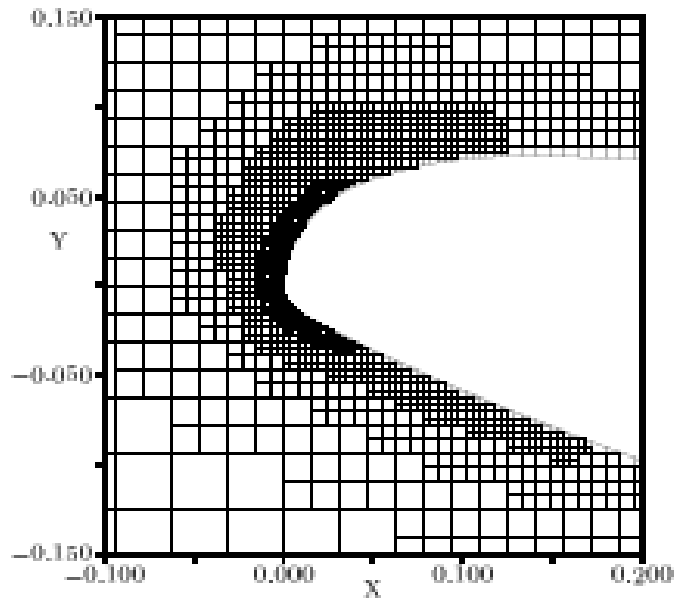


Рис. 9: Пример адаптированной декартовой сетки с увеличенным разрешением вблизи обтекаемой поверхности (from De Zeeuw, PhD Dissertation, 1993).

ЗАДАНИЕ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Правильное задание граничных условий является важным фактором, от которого зависит точность численного решения во всей вычислительной области. Важно использовать априорную информацию о характере течения, т.е. знать через какие границы плазма втекает, через какие вытекает, и с какой скоростью. Рассмотрим задачу обтекания

- Обтекаемая поверхность – 1.
- Линии симметрии – 2.
- Входная граница – 3.
- Выходная граница – 4.

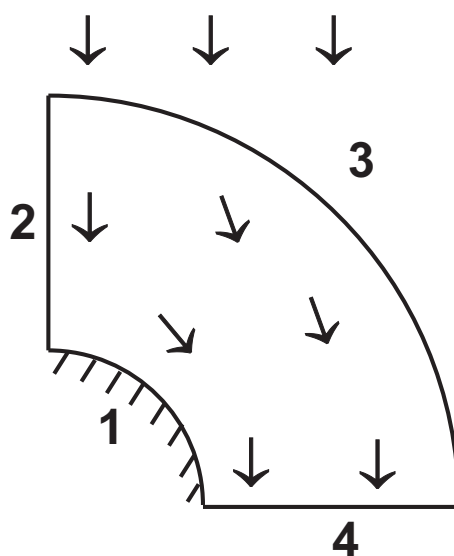


Рис. 10: Пример вычислительной области с четырьмя границами.

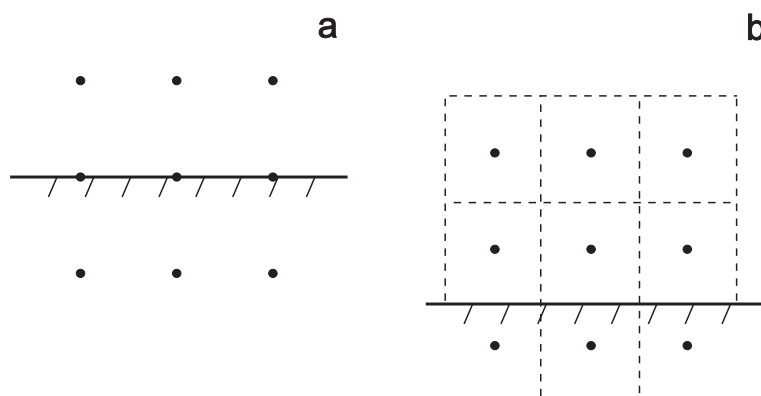


Рис. 11: Два примера расположения граничных точек.

В гидродинамике, если обтекаемая поверхность осесимметрична, и скорость направлена вдоль оси симметрии, можно рассматривать двухмерную задачу. В магнитной гидродинамике задача обтекания будет двухмерной только в том случае, если магнитное поле направлено также строго вдоль оси симметрии.

Граничные точки могут быть расположены по разному (см. рис. 11 а и б). В конечно-разностных методах предпочтительнее, чтобы граница проходила между узлами сетки (11б), а в методе конечных объемов – соответственно вдоль границ элементарных объемчиков.

1) ОБТЕКАЕМАЯ ПОВЕРХНОСТЬ: наиболее распространенные физические граничные условия $V_n = 0$ и $B_n = 0$.

2) ЛИНИЯ СИММЕТРИИ: $f_{out} = f_{in}$ для $V_n, \rho, \varepsilon \dots$
 $f_{out} = -f_{in}$ для V_τ (т.е. условие $V_\tau = 0$).

3) ВХОДНАЯ ГРАНИЦА: обычно используем физические граничные условия для данной задачи. Надо учитывать, может ли возмущение выходить из численной области через эту границу (в случае дозвукового течения) или нет (при сверхзвуковом течении).

4) ВЫХОДНАЯ ГРАНИЦА: граничные условия в точке f_n (на границе) задаются численно в виде: $f_n = f_{n-1}$ или $f_n = 2f_{n-1} - f_{n-2}$ или более сложной экстраполяцией из внутренних точек. **Нужно учитывать условие бездивергентности.** В частности, из него обычно определяется нормальная компонента магнитного поля.

Периодические граничные условия используются, например, при моделировании магнитного пересоединения. В этом случае "замыкаются" граничные условия на двух противоположных границах (т.е. левая граница $x = -\pi$, правая граница $x = +\pi$).

ТЕСТИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

1. Тестирование схемы при помощи одномерной автомодельной задачи.

В данной задаче (Ландау, Лифшиц, т. 6, §99) рассматривается поршень, движущийся со скоростью U , в длинной цилиндрической трубе, заполненной невязким сжимаемым политропным газом. Параметры газа меняются только вдоль оси трубы (ось X). Когда скорость U превосходит скорость звука c_0 , перед поршнем образуется ударная волна. Такое движение автомодельно, т.к. поведение параметров газа зависит не от координаты и времени по отдельности, а от величины $\zeta = x/t$. Существует точное решение для величины скачка давления через ударную волну

$$\frac{p_1}{p_0} = 1 + \frac{\gamma(\gamma + 1)U^2}{4c_0^2} + \frac{\gamma U}{c_0} \sqrt{1 + \frac{(\gamma + 1)^2 U^2}{16c_0^2}} \quad (63)$$

и скачка плотности

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{(\gamma - 1)p_0 + (\gamma + 1)p_1}{(\gamma + 1)p_0 + (\gamma - 1)p_1} \quad (64)$$

Наличие точного аналитического решения позволяет оценить погрешность, возникающую при численном решении задачи.

2. Проверка выполнения условий Рэнкина-Гюгонио на разрывах.

В частности, должно выполняться условие сохранения потока вещества

$$\{\rho V_n\} = 0, \quad (65)$$

сохранение потока нормальной компоненты импульса

$$\{\rho V_n^2 + p + B_t^2/8\pi\} = 0, \quad (66)$$

сохранение потока энергии

$$\rho V \left\{ \frac{p}{\rho} + \varepsilon + \frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{4\pi\rho} B_t^2 \right\} = \frac{B_n}{4\pi} \{V_t B_t\}, \quad (67)$$

а также проверяют сохранение потока тангенциальной компоненты импульса, условие непрерывности нормальной компоненты магнитного поля и тангенциальной компоненты импульса (см. курс лекций по МГД разрывам).

3. Сохранение энтропии вдоль линий потока.

В идеальной МГД движение плазмы является адиабатическим, т.е. должно выполняться соотношение $ds/dt = 0$, где s – энтропия, а

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla.$$

Известно, что в гидродинамике $s = C_v \ln(p/\rho^\gamma)$. Поэтому, для стационарного течения можно требовать, чтобы p/ρ^γ оставалась неизменной вдоль линий потока (при отсутствии разрывов).

4. Проверка выполнения условия $div B = 0$.

Это необходимо в том случае, если численное значение вектора магнитного поля не корректируется в ходе расчета. С целью проверки можно, например, сравнить полученное численное решение с решением, которое получится, если в уравнение движения вычесть (из правой части) величину $\vec{B}div\vec{B}$.

5. Проверка качества разрешения сетки.

Увеличить разрешение сетки в 2 раза и сравнить полученные решения.

6. Оценка влияния граничных условий.

Посмотреть, как решение зависит от заданных граничных условий.

7. При использовании метода релаксации - проверить сходимость к стационарному решению.

8. Сравнение полученных результатов с работами других авторов.

ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ К ЧИСЛЕННЫМ РЕШЕНИЯМ

1. Полученное решение устойчиво, т.е. мало меняется при малом изменении входных параметров.

2. Точное выполнение законов сохранения (массы, момента, энергии).

3. Выполнение требования бездивергентности магнитного поля: $div(B) = 0$

4. Давление и плотность всегда должны оставаться положительными.

5. Численная вязкость должна быть минимальна при решении уравнений идеальной МГД или должна быть сопоставима с физической вязкостью, в случае использования в уравнениях диссипативных членов.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Поттер Д., Вычислительные методы в физике, Мир, 1975.
2. Роуч П., Вычислительная гидродинамика, Мир, 1980.
3. Рихтмайер Р., Мортон Н., Разностные методы решения краевых задач, Мир, 1972.
4. Ferziger J.H., Peric M., Computational methods for fluid dynamics, Springer, 2002.
5. Press W.H., B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, Numerical recipes in Pascal, Cambridge Univ. Press, 1989.