Дополнительные главы магнитной гидродинамики и физики плазмы

Введение

Все объекты, изучаемые космической физикой, Солнце, солнечный ветер, магнитосферы и ионосферы планет, состоят из плазмы. Как хорошо известно, плазма – это газообразная среда, состоящая из заряженных частиц и некоторого числа нейтральных атомов. Такое утверждение однако не является точным определением того, что такое плазма, поскольку, например, в околоземной нейтральной атмосфере (на уровне моря) тоже существует незначительное число заряженных частиц. Но плазмой это назвать нельзя. Часто используется следующее определение плазмы. Плазма – это облако ионизованного газа, в котором величина дебаевского радиуса меньше характерного размера системы, а число частиц в шаре дебаевского радиуса больше единицы. Дебаевский радиус – это расстояние, на котором происходит экранирование электрического заряда (внесенного в систему извне или образовавшегося в результате флуктуаций). Дебаевский радиус можно рассчитать по формуле

$$R_D = \left(\frac{kT}{4\pi n e^2}\right)^{1/2},$$

где в качестве температуры и концентрации обычно берут температуру и концентрацию электронов, поскольку электроны наиболее подвижные частицы в плазме, и дебаевское экранирование осуществляется за счет электронов. В практических задачах можно пользоваться упрощенной формулой $R_D = 740\sqrt{T/n}$, где в данном случае T берется в электронвольтах, а n в см$^{-3}$, и R_D получается в см. Если принять, что в солнечном ветре $T = 10$ эВ и $n = 10$ см$^{-3}$, то получается $R_D = 7.4$ м. Очевидно, что солнечный ветер полностью соответствует данному определению плазмы.

1 КИНЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЛАЗМЫ

§ 1. Гамильтониан заряженной частицы в электромагнитном поле

Уравнение движения заряженной частицы с массой m и зарядом q в электромагнитном поле в нерелятивистском приближении имеет вид:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}). \tag{1.1}$$

Это уравнение позволяет рассчитать по отдельности траекторию каждой частицы, если заданы ее начальные положение и скорость.

Это же движение можно описать и другим, но по сути полностью эквивалентным способом, используя гамильтонов формализм. Такой подход удобен для описания динамики системы, состоящей из множества заряженных частиц, например, плазмы.

Гамильтониан для заряженной частицы, движущейся с нерелятивистской скоростью в электрическом и магнитном полях, равен (Ландау, Лифщиц, т. 2, § 16)

$$H = \frac{1}{2m}[\mathbf{p} - \frac{1}{c}q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 + q\Phi(\mathbf{r}, t), \tag{1.2}$$

где $\mathbf{p}$ – обобщенный импульс, канонически сопряженный с $\mathbf{r}$, а $\mathbf{A}$ и Φ — векторный и скалярный потенциалы магнитного и электрического полей соответственно.

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Гамильтоновы уравнения имеют вид (Ландау, Лифщиц, т. 1):

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \tag{1.4}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}. \tag{1.5}$$

Убедимся в том, что уравнения (1.4 - 1.5) эквивалентны (1.1). Подставим (1.2) в (1.4):

$$\mathbf{v} = \frac{1}{m}(\mathbf{p} - \frac{1}{c}q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)). \tag{1.6}$$

Продифференцировав (1.6) еще раз по времени, получим

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{m}\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} - \frac{1}{c}q\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right) = \frac{1}{m}\left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} - \frac{1}{c}q\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}q(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A}\right) \tag{1.7}$$

Для нахождения производной $\mathbf{p}$, используем (1.5) и (1.2):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left\{\frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 + q\Phi(\mathbf{r}, t)\right\} \tag{1.8}$$

Для нахождения первого члена в правой части (1.8) запишем тождество из векторной алгебры:

$$\mathbf{a} \times [\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}] = \frac{1}{2}\nabla(a^2) - (\mathbf{a}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{a}. \tag{1.9}$$

Воспользовавшись (1.6) и тем, что $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ - независимые переменные (т.е. $\nabla \times \mathbf{p} = 0$; $\nabla \mathbf{p} = 0$), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -q\nabla\Phi - \frac{1}{m}(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}) \times [\nabla \times (\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A})] - \frac{1}{m}((\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}) \cdot \nabla)(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}) = \\ &= -q\nabla\Phi + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \operatorname{rot}\mathbf{A} + (\mathbf{v}\nabla)(\frac{q}{c}\mathbf{A}) = -q\nabla\Phi + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{q}{c}(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Подставим (1.10) в (1.7):

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -q\nabla\Phi + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \frac{q}{c}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A} - \frac{q}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{q}{c}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A}.$$

Использовав определения потенциалов (1.3), окончательно получим

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(-\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}) + \frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}] \qquad —$$

уравнение, полностью идентичное (1).

Дополнительные вопросы:

1. Какой физический смысл имеет гамильтониан?
2. Исходя из чего выводятся уравнения Гамильтона?
3. Существуют ли другие способы выражение магнитного и электрического поля через потенциалы?

§ 2. **Теорема Лиувилля, уравнения Больцмана—Власова**

В статистической физике используется понятие фазового пространства, как пространства, характеризуемого независимыми переменными $r_1 ... r_k, p_1 ... p_k$, где r и p – обобщенные координаты и обобщенные импульсы, k – полное число степеней свободы $k \leq 3 * N$ (N - число частиц). Каждому возможному состоянию системы соответствует точка в этом фазовом пространстве. Но вместо нахождения траектории точки в фазовом пространстве, соответствующей точному решению уравнений движения для всех частиц, рассматривают функцию распределения (плотность вероятности) $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. В этом случае можно рассматривать 6-мерное (а не 6 N-мерное) фазовое пространство ($\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$). Величина $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{p}$ определяет вероятность нахождения системы в фазовом объеме ($\mathbf{r} : \mathbf{r} + d\mathbf{r}, \mathbf{p} : \mathbf{p} + d\mathbf{p}$) в момент t. Функции распределения для частиц разного рода (электроны и ионы разных видов) обычно не совпадают.

Аналогично уравнению неразрывности в гидродинамике, можно записать закон сохранения вероятности вдоль фазовой траектории

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0. \tag{1.11}$$

Это — теорема Лиувилля для бесстолкновительной плазмы. Используя (1.4) и (1.5), получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{H}_p\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \mathbf{H}_r\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \tag{1.12}$$

Уравнение (1.12) можно записать в более сжатой форме, используя скобки Пуассона

$$\{f, H\} = \frac{\partial f}{\partial r_j}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\cdot\frac{\partial H}{\partial r_j},$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0$$

Уравнение (1.12) эквивалентно уравнениям Гамильтона. Действительно, (1.12) — уравнение в частных производных по независимым переменным $(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$. Существенно, что все производные, входящие в (1.12) — первого порядка; соответственно, оно может быть сведено к системе связанных друг с другом обыкновенных дифференциальных уравнений и тем самым решено.

Для дальнейшего анализа используем уравнения (1.4) - (1.6) и (1.10):

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{m}(\mathbf{p} - \frac{1}{c}q\mathbf{A}) = \mathbf{v}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = q\nabla\Phi - \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{q}{c}(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{A}$$

Тогда (1.12) сводится к:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - (q\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{q}{c}(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{A})\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \tag{1.13}$$

Это уравнение можно существенно упростить, перейдя от переменных $(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ к $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$.

Примечание: при переходе от одних независимых переменных к другим используется преобразование Якоби:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial \Phi}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}, \text{ где}$$

$$x_1 = t, \ x_2 = \mathbf{p}, \ x_3 = \mathbf{r},$$

$$y_1 = t, \ y_2 = \frac{1}{m}(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}) = \mathbf{v}, \ y_3 = \mathbf{r}.$$

Используем то, что t, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ — независимые переменные.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \\
&= \frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{q}{mc}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{q}{mc}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} \\
\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} &= \frac{\partial f_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{1}{m}\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial f_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} - \frac{q}{cm} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}}$$

Соответственно, уравнение (1.13) сводится к:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{q}{mc}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} - \frac{q}{mc}(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}})\mathbf{A} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} -$$

$$-\frac{1}{m} \cdot (q\nabla\Phi - \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{q}{c}(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A}) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

или (опуская индекс 1):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{q}{m}(-\nabla\Phi + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t})\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = 0$$

В итоге, получаем уравнение Больцмана для бесстолкновительной плазмы:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q}{m}(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B})\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (1.14)$$

Для многокомпонентной плазмы справедливо обобщение:

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_s}{m_s}(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B})\frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

Если дополнить последнее уравнение уравнениями Максвелла, то получится система уравнений, предложенная Власовым:

$$\begin{aligned}
&\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\sum_s q_s \int f_s \mathbf{v}\, d\mathbf{v} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\
&\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_s q_s \int f_s\, d\mathbf{v} \\
&\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
&\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,
\end{aligned} \quad (1.15)$$

где суммирование производится по S сортам частиц (ионы, электроны).

Дополнительные вопросы:

1. Является ли космическая плазма бесстолкновительной?

§ 3. Изотропная функция распределения, распределение Максвелла

Будем рассматривать нейтральный газ, состоящий из частиц одного сорта. Этот газ характеризуется функцией распределения $f(\mathbf{v})$. Пусть внешние силы отсутствуют, и средняя скорость потока равна нулю, тогда $\mathbf{v}$ — это скорость теплового движения частиц. При этих условиях функция распределения не должна зависеть от направления, т.е. она должна быть изотропной.

В равновесных условиях $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$.
Так как сила Лоренца равна нулю, то уравнение (1.14) становится бессодержательным, и мы о нем пока забудем. Введем, наряду с $f(\mathbf{v})$, функции распределения $f_1(v_x),\ f_2(v_y),\ f_3(v_z)$. Соответственно, количество частиц в единичном объеме, обладающих полной скоростью в интервале между $(v_x^2+v_y^2+v_z^2)^{1/2}$ и $[(v_x+dv_x)^2+(v_y+dy)^2+(v_z+dv_z)^2]^{1/2}$ запишется как произведение этих трех функций распределения. С другой стороны, это же количество частиц равно $f dv_x dv_y dv_z$; следовательно

$$f(\mathbf{v})dv_x dv_y dv_z = f_1 f_2 f_3 dv_x dv_y dv_z \quad (1.16)$$

$f(\mathbf{v})$ изотропна, т.е. вместо $f(\mathbf{v})$ можно взять $f(|\mathbf{v}|) = F(v^2)$, тогда (1.16) имеет вид:

$$F(v^2) = f_1(v_x) f_2(v_y) f_3(v_z) \quad (1.17)$$

Прологарифмируем выражение (1.17):

$$\ln F = \ln f_1 + \ln f_2 + \ln f_3$$

Продифференцируем последнее выражение по v_x, v_y, v_z:

$$\frac{\partial(\ln F(v^2))}{\partial v_x} = \frac{\partial(\ln F(v^2))}{\partial v^2}\frac{\partial v^2}{\partial v_x} = \frac{\partial F/\partial(v^2)\cdot 2v_x}{F(v^2)} = \frac{\partial f_1/\partial v_x}{f_1}$$
$$\frac{\partial(\ln F(v^2))}{\partial v_y} = \frac{\partial F/\partial(v^2)\cdot 2v_y}{F(v^2)} = \frac{\partial f_2/\partial v_y}{f_2}$$
$$\frac{\partial(\ln F(v^2))}{\partial v_z} = \frac{\partial F/\partial(v^2)\cdot 2v_z}{F(v^2)} = \frac{\partial f_3/\partial v_z}{f_3}$$

Отсюда следует:

$$\frac{1}{F(v^2)}\frac{\partial F(v^2)}{\partial(v^2)} = \frac{\partial f_1/\partial v_x}{2v_x f_1} = \frac{\partial f_2/\partial v_y}{2v_y f_2} = \frac{\partial f_3/\partial v_z}{2v_z f_3} \tag{1.18}$$

Выражения с f_1, f_2 и f_3 зависят каждое лишь от своей переменной (v_x, v_y, v_z), и равенство (1.18) означает, что все они — константы $(= -b)$.
Итак:

$$\frac{\partial F(v^2)/\partial(v^2)}{F(v^2)} = -b,$$

$$\frac{\partial}{\partial(v^2)}\ln[F(v^2)] = -b,\ \ln F(v^2) = -bv^2 + C$$

или:

$$F(v^2) = C\,e^{-bv^2} = C\,e^{-b(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}. \tag{1.19}$$

Константы b и C найдем из определения плотности и температуры плазмы (подробнее моменты функции распределения будут рассмотрены в § 5).

$$n = \int F(v^2)dv_x dv_y dv_z = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(v^2)\cdot v^2 \sin\theta\, dv\, d\theta\, d\varphi =$$
$$= 2\pi\cdot 2\int_0^\infty F(v^2)v^2 dv = 4\pi\int_0^\infty Ce^{-bv^2}v^2 dv = \frac{C}{b^{3/2}}\pi^{3/2}$$

Примечание. Используем табличный интеграл:

$$\int_0^\infty x^{2a}e^{-r^2x^2}dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2a-1)}{2^{a+1}r^{2a+1}}\sqrt{\pi} \quad (\text{где } a \text{ — целое}) \tag{1.20}$$

В частном случае:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-r^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4r^3} \to \int_0^\infty v^2 e^{-bv^2}dv = \frac{\sqrt{\pi}}{4b^{3/2}}$$

Тепловая энергия для идеального газа выражается как:

$$\begin{aligned}
\varepsilon = \frac{3}{2}nkT = \int \frac{1}{2}mv^2 F(v^2)d\mathbf{v} = \\
= \frac{1}{2}m\int v^2 \cdot F(v^2)v^2 \sin\theta\, d|v|\, d\theta\, d\varphi = \\
= \frac{1}{2}m\int v^4 Ce^{-bv^2} \sin\theta\, d|v|\, d\theta\, d\varphi = \\
= \frac{1}{2}m4\pi C\int_0^\infty v^4 e^{-bv^2}dv = \frac{1}{2}m\cdot 4\pi C\frac{3}{2^3 b^{5/2}}\sqrt{\pi} = \frac{3mC\pi^{3/2}}{4b^{5/2}}
\end{aligned}$$

Итак:

$$n = \frac{C}{b^{3/2}}\pi^{3/2}; \tag{1.21}$$

$$\frac{3}{2}nkT = \frac{3mC\pi^{3/2}}{4b^{5/2}} \tag{1.22}$$

Разделим (1.22) на (1.21):

$$\frac{3}{2}kT = \frac{3mC\pi^{3/2}}{4b^{5/2}}\frac{b^{3/2}}{C\pi^{3/2}} = \frac{3m}{4b};\ \rightarrow\ b = \frac{m}{2kT}; \tag{1.23}$$

Соответственно, из (1.21) находим:

$$C = n(\frac{m}{2kT})^{3/2}\cdot\frac{1}{\pi^{3/2}} \tag{1.24}$$

Таким образом, окончательно вместо (1.19) получается:

$$F(v^2) = n\frac{1}{(\pi)^{3/2}}(\frac{m}{2kT})^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = n(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}e^{-\frac{m}{2kT}(v_x^2+v_y^2+v_z^2)} \tag{1.25}$$

Учитывая $F(v^2) = f_1\cdot f_2\cdot f_3$, получим:

$$f(v_i) = \sqrt[3]{n}(\frac{m}{2\pi kT})^{1/2}e^{-\frac{m}{2kT}v_i^2} \tag{1.26}$$

Плотность частиц, обладающих скоростями в интервале $|\mathbf{v}|$ и $|\mathbf{v}+d\mathbf{v}|$, равна произведению f на элементарный объем $\int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} v^2 dv d\varphi = 4\pi v^2 dv$, т. е.

$$dn = 4\pi v^2 n(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2}e^{-\frac{mv^2}{2kT}}dv = F_M(v)\cdot dv,$$

где $F_M(v)$ — Максвелловская функция распределения для скоростей, заключенных в интервале $|\mathbf{v}|$ и $|\mathbf{v}+d\mathbf{v}|$. Т.о. функция $F_M(v)$ — это изотропная функция распределения, проинтегрированная по всем направлениям движения.

Если во всем рассматриваемом объеме существует максвелловское распределение, то плазма находится в полном равновесии. Плазма является изотропной, однородной в пространстве, и ее свободная энергия минимальна. Никакие изменения невозможны. На самом деле, на практике используется понятие **локально максвелловской** плазмы. Т.е. предполагается, что плазма обладает максвелловским распределением по скоростям с температурой T в объеме, малом по сравнению с размерами системы, но достаточно большом, чтобы содержать много частиц. При этом предполагается, что как концентрация частиц, так и их температура могут медленно изменяться в пространстве и во времени.

Дополнительные вопросы:

1. Какие функции распределения частиц кроме распределения Максвелла вы знаете?

§ 4. **Функция распределения со смещенной скоростью, функция распределения во внешнем электрическом поле**

Как изменится функция распределения Максвелла, если плазма движется со средней скоростью u вдоль оси X? Предположим, что экспонента максвелловского распределения смещена на некоторую величину скорости v_0 на оси X. Покажем, что $v_0 = u$. Согласно определению средняя скорость выражается через интеграл от функции распределения:

$$\frac{1}{n}\int F(v^2)\cdot v_x\cdot dv_x dv_y dv_z = u. \tag{1.27}$$

Подставим $F(v^2)$ из (1.25).

$$\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\int v_x\cdot e^{-\frac{m}{2kT}((v_x-v_0)^2+v_y^2+v_z^2)}dv_x dv_y dv_z = u. \tag{1.28}$$

Используем табличный интеграл (1.20)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{r},$$

в то время как

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx = 0.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m}{2kT}(v_y^2+v_z^2)}dv_y dv_z = \frac{\pi\cdot 2kT}{m}. \tag{1.29}$$

Остается интеграл по v_x

$$\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} v_x\cdot e^{-\frac{m}{2kT}(v_x-v_0)^2}dv_x = u. \tag{1.30}$$

Перейдем к интегрированию по $v_{sh} = v_x - v_0$

$$\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}(v_{sh}+v_0)\cdot e^{-\frac{m}{2kT}v_{sh}^2}dv_{sh} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} v_0\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m}{2kT}v_{sh}^2}dv_{sh} = u. \tag{1.31}$$

Опять использовав (1.20) получим искомое тождество

$$v_0 = u.$$

Таким образом, если плазма имеет среднюю скорость движения v_{x0}, то (1.26) будет иметь вид

$$f(v_x) = \sqrt[3]{n}(\frac{m}{2\pi kT})^{1/2}e^{-\frac{m}{2kT}(v_x-v_{x0})^2}. \tag{1.32}$$

Множитель $2kT/m$ в знаменателе экспоненты является квадратом тепловой скорости.

Получим теперь функцию распределения в однородном электрическом поле. Для простоты будем считать, что электрическое поле стационарно и направлено по оси x: $E = -\partial\varphi/\partial x$. В этом случае уравнение Больцмана (1.14) сводится к:

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{q}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v_x} = 0, \tag{1.33}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0, \ \frac{\partial}{\partial t} = 0.$$

Пусть $f = f_1(x, v_x) \cdot f_2(v_y) \cdot f_3(v_z)$. Тогда уравнение (1.33) принимает вид:

$$v_x f_2 f_3 \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{q}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} f_2 f_3 \frac{\partial f_1}{\partial v_x} = 0 \tag{1.34}$$

Уравнение (1.34) будем решать методом разделения переменных:

$$f_1(x, v_x) = F(v_x) \cdot G(x) \tag{1.35}$$

Подставляя выражение (1.35) в уравнение (1.34), получаем:

$$v_x F \cdot \frac{dG}{dx} - \frac{q}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} G \frac{dF}{dv_x} = 0, \tag{1.36}$$

или:

$$\frac{1}{\frac{q}{m}\frac{\partial \varphi}{\partial x}} \frac{dG/dx}{G(x)} = \frac{1}{v_x} \frac{dF/dv_x}{F} \tag{1.37}$$

Поскольку левая и правая части зависят каждая от своей переменной, то каждую из них можно приравнять некоторой постоянной $(-b)$:

$$\frac{1}{v_x} \frac{dF/dv_x}{F} = \frac{1}{\frac{q}{m}\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}} \frac{dG/dx}{G} = -b.$$

Следовательно:

$$\frac{dF}{F} = -b v_x dv_x,$$

$$F = Ce^{-\frac{b}{2}v_x^2}. \tag{1.38}$$

Вместе с тем

$$\frac{dG}{G} = -b\frac{q}{m} d\varphi \to G = C_1 e^{-b\frac{q}{m}\varphi} \tag{1.39}$$

Подставляя выражения (1.38) и (1.39) в (1.35), находим:

$$f_1(x, v_x) = Ce^{-b(\frac{1}{2}v_x^2 + \frac{q}{m}\varphi)} \tag{1.40}$$

при $\varphi = 0$, f_1 должна быть максвелловской, то есть

$$f_1\Big|_{\varphi=0} = \sqrt[3]{n} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m}{2kT}v_x^2}$$

Отсюда $b = \frac{m}{kT}$ и $C = \sqrt[3]{n}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}$, и (1.40) можно записать как:

$$f_1 = \sqrt[3]{n}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-(\frac{mv_x^2}{2kT}+\frac{q\varphi}{kT})}. \tag{1.41}$$

Относительно f_2 и f_3 ясно, что они должны быть максвелловскими:

$$f = f_1 f_2 f_3 = n_0(\frac{m}{2\pi kT})^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}-\frac{q\varphi}{kT}}.$$

Дополнительные вопросы:

1. Какую информацию о макропараметрах плазмы можно извлечь, зная функцию распределения?

§ 5. Вывод уравнений магнитной гидродинамики из уравнения Больцмана.

На практике чаще используется не сама функция распределения, а ее моменты, являющиеся макроскопическими величинами (концентрация, скорость, энергия). В общем случае, средняя величина некоторой функции $\Psi(\mathbf{v})$ определяется как:

$$< \Psi(\mathbf{v}) >= \frac{\int \Psi(\mathbf{v}) \cdot f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) d\mathbf{v}}{\int f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) d\mathbf{v}} = \frac{1}{n}\int \Psi(\mathbf{v}) f d\mathbf{v}$$

Концентрация частиц определяется как нулевой момент функции распределения:

$$n(\mathbf{r},t) = \int f(\mathbf{r},\mathbf{v},\mathbf{t}) d^3\mathbf{v}, \tag{1.42}$$

Скорость, с которой движется плазма, есть средняя скорость всех частиц:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \frac{\int \mathbf{v} f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) d\mathbf{v}}{\int f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) d\mathbf{v}} = \frac{1}{n}\int \mathbf{v} f d\mathbf{v} \tag{1.43}$$

Вычислим **нулевой момент** уравнения Больцмана (1.14):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q}{m}(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B})\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0.$$

Для этого проинтегрируем это уравнение по всему пространству скоростей $d\mathbf{v}$:

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} + \int \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{v} + \frac{q}{m}\int (\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B})\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = 0 \tag{1.44}$$

Далее используем то, что t, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ являются независимыми переменными. Первый член дает:

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t}\int f\, d\mathbf{v} = \frac{\partial n}{\partial t}. \tag{1.45}$$

Второй член интегрируется следующим образом:

$$\int \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\int \mathbf{v} f\, d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(n\mathbf{u}) = \mathrm{div}(n\mathbf{u}) \tag{1.46}$$

Вычислим третий член (учитывая, что $\mathbf{E}$ не зависит от скорости):

$$\int \mathbf{E}\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}d^3\mathbf{v} = \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{E}f)d^3\mathbf{v} = \text{ по теореме Гаусса } \int_s f\mathbf{E}\,\mathbf{dS_v} = 0. \tag{1.47}$$

Хотя размер поверхности S на бесконечности (в пространстве скоростей) увеличивается $\sim v^2$, но $f(v)$ убывает по экспоненте и поэтому $\int_{S\to\infty} fE\,dS_v = 0$

$$\int [\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}d\mathbf{v} = \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}(f\cdot[\mathbf{v}\times\mathbf{B}])d\mathbf{v} - \int f\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]d\mathbf{v} =$$

$$\int_{ds\to\infty} f[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]\cdot\mathbf{dS_v} - \int f(\frac{\partial}{\partial v_x}[v_yB_z - v_zB_y]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial v_y}[v_zB_x - v_xB_z] + \frac{\partial}{\partial v_z}[v_xB_y - v_yB_x])d\mathbf{v} = 0$$

Получили уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathrm{div}\,(n\mathbf{u}) = 0. \tag{1.48}$$

Если мы запишем (1.48) отдельно для протонов и электронов, умножим на e и вычтем одно из другого, то получим закон сохранения заряда:

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_pe - n_ee) + \mathrm{div}\,(n_peu_p - n_eeu_e) = 0$$

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0 \tag{1.49}$$

Момент первого порядка

Умножим уравнение Больцмана на $m\mathbf{v}$ и проинтегрируем по всем скоростям:

$$m\int \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial t}d\mathbf{v} + m\int \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}})f\,d\mathbf{v} + q\int \mathbf{v}\left((\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\right)d\mathbf{v} = 0 \tag{1.50}$$

Рассмотрим все члены уравнения (1.50). Первый член:

$$m\int \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial t}d\mathbf{v} = m\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{v}f d\mathbf{v} = m\frac{\partial}{\partial t}(n\mathbf{u}).$$

Второй член (опять используем то, что переменные $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ независимы):

$$\int \mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}})f\,d\mathbf{v} = \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(f\mathbf{v}\mathbf{v})d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\int f\mathbf{v}\mathbf{v}\,d\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(n < \mathbf{v}\mathbf{v} >)$$

Здесь $\mathbf{vv}$ - диадное произведение. Последний вывод можно пояснить, расписав диадное произведение по компонентам:

$$\left[v_xv_x\frac{\partial f}{\partial x} + v_xv_y\frac{\partial f}{\partial y} + v_xv_z\frac{\partial f}{\partial z}\right]\mathbf{e}_x + \ldots = \left[\frac{\partial v_x^2 f}{\partial x} + \frac{\partial v_xv_yf}{\partial y} + \frac{\partial v_xv_zf}{\partial z}\right]\mathbf{e}_x + \ldots$$

Примечание: В 2-мерном случае диадное произведение векторов **a** и **b** это тензор:

$\mathbf{ab} = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y \\ a_y b_x & a_y b_y \end{pmatrix}$
Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{ab} = \sum_i \mathbf{e}_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(a_i b_j) = \sum_i \mathbf{e}_i \sum_j b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \sum_i \mathbf{e}_i \sum_j a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_j} = (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} + \mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b}).$$

Можно представить скорость **v** как сумму средней скорости **u** и хаотической (тепловой) скорости **w**:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}; \quad < \mathbf{w} >= 0.$$

Тогда:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(n < \mathbf{vv} >) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(n < (\mathbf{u}+\mathbf{w})(\mathbf{u}+\mathbf{w}) >) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(n < \mathbf{uu}+\mathbf{uw}+\mathbf{wu}+\mathbf{ww} >) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(n < \mathbf{uu} > + n < \mathbf{ww} >) = \mathbf{u}\,\mathrm{div}(n\mathbf{u}) + n(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u} + \frac{1}{m}\nabla P_{ij}$$

Мы ввели новую величину — тензор давления P_{ij}:

$$P_{ij} = m\int w_i w_j f d\mathbf{v} = nm < \mathbf{ww} > . \tag{1.51}$$

$$\nabla P_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} P_{ij}\mathbf{e}_i = \sum_i \mathbf{e}_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} P_{ij}$$

Третий член в (1.50):

$$\int \mathbf{v}\left((\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\right)d\mathbf{v} = \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\left(\mathbf{v}f(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B})\right)d\mathbf{v} - \int(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B})f\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{v}}d\mathbf{v} -$$

$$-\int f\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B})d\mathbf{v} = -\int(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B})f\,d\mathbf{v} = -n(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{u}\times\mathbf{B}).$$

Мы используем то, что **E** от **v** не зависит, а $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_k}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})_k = 0$.
Кроме того, как показано выше $\int \frac{\partial (f\mathbf{A})}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = \int f\mathbf{A}\cdot\mathbf{dS} = 0$.

В итоге, мы получили:

$$\frac{\partial}{\partial t}(mn\mathbf{u}) + \mathbf{u}\cdot\nabla\,(mn\mathbf{u}) + mn(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + \nabla\,P_{ij} - nq(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{u}\times\mathbf{B}) = 0$$

$$mn\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + m\mathbf{u}\frac{\partial n}{\partial t} + m\mathbf{u}\nabla(n\mathbf{u}) + mn(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + \nabla\,P_{ij} - nq(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{u}\times\mathbf{B}) = 0$$

Использовав (1.48), окончательно получим:

$$mn(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}) = +nq(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot P_{ij} \tag{1.52}$$

Итак, в уравнении движения для усредненных скоростей появляется градиент теплового давления $(-\nabla \cdot P_{ij})$, которого не было в исходном уравнении движения для отдельной частицы.

Запишем отдельно (1.52) для протонов и электронов и сложим одно с другим:

$$\begin{aligned} & m_p n_p \left(\frac{\partial \mathbf{u}_p}{\partial t} + (\mathbf{u}_p \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}_p \right) = n_p e(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{u}_p \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot P_{ij}^p \\ + & \\ & m_e n_e \left(\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + (\mathbf{u}_e \boldsymbol{\nabla})\mathbf{u}_e \right) = -n_e e(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot P_{ij}^e. \end{aligned}$$

В итоге, получаем одножидкостное уравнение движения (учитывая, что $m_e << m_p$):

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} \right) = \frac{ne}{c}(\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_e) \times \mathbf{B} - \boldsymbol{\nabla} \cdot P_{ij} + \rho_e \mathbf{E}$$

Считаем, что скорость потока $U \approx u_p$. Поскольку плотность заряда ρ_e в электрически нейтральной плазме пренебрежимо мала, окончательно получаем

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} \right) = \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot P_{ij} \tag{1.53}$$

$$P_{ij} = P_{ij}^p + P_{ij}^e$$

Момент второго порядка:

Умножим (1.14) на $\frac{1}{2}mv^2$ и проинтегрируем по всем скоростям.

$$\frac{1}{2}m \int v^2 \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} + \frac{1}{2}m \int v^2 \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} d\mathbf{v} + \frac{1}{2}q \int v^2 (\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v} = 0 \tag{1.54}$$

Рассмотрим каждый член в (1.54) по отдельности.

Первый член:

$$\frac{1}{2}m \int v^2 \frac{\partial f}{\partial t} d\mathbf{v} = \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial t} \int v^2 f \, d\mathbf{v} = \frac{m}{2}\frac{\partial}{\partial t}(n < v^2 >)$$

Как и раньше $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$

$$< v^2 > = < (\mathbf{u} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{w}) > = u^2 + 2\mathbf{u} < \mathbf{w} > + < w^2 > = u^2 + < w^2 >$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m\frac{\partial}{\partial t}(n < v^2 >) &= \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}nmu^2 + < \frac{1}{2}nm(w_x^2 + w_y^2 + w_z^2) >) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}nmu^2 + \frac{1}{2}P_{ii}), \end{aligned} \tag{1.55}$$

где согласно (1.51) $\sum P_{ii} = Tr(P_{ij}) =< nmw_{ii}^2 >$, $\frac{1}{2}P_{ii}$ — средняя энергия теплового движения частицы (внутренняя энергия).

Второй член в (1.54):

$$\frac{1}{2}m\int v^2\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}}d\mathbf{v} = \frac{1}{2}m\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\int (v^2\mathbf{v}f)d\mathbf{v} = \frac{1}{2}m\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(n < v^2\mathbf{v} >) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{1}{2}nm < v^2 v_i >);$$

$$< v^2 v_i >=< \sum_j v_j^2 v_i >=< \sum_j (u_j + w_j)^2(u_i + w_i) >=$$

$$= \sum_j < u_j^2 u_i + 2u_j w_j u_i + w_j^2 u_i + u_j^2 w_i + 2u_j w_j w_i + w_j^2 w_i >=$$

$$= \sum_j (u_j^2 u_i + < w_j^2 > u_i + 2u_j < w_j w_i > + < w_j^2 w_i >).$$

Соответственно,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{1}{2}nm < v^2 v_i >) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{1}{2}nmu^2 u_i + \frac{1}{2}P_{jj}\cdot u_i + u_j P_{ij} + Q_i), \qquad (1.56)$$

где $Q_i = \frac{1}{2}nm < w^2 w_i >= \int \frac{1}{2}mw^2 w_i f d\mathbf{v}$, $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t)$ — вектор теплового потока.

Третий член в (1.54):

$$\frac{q}{2}\int v^2(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B})\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}f\, d\mathbf{v} =$$

$$= \frac{q}{2}\int \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\left(v^2(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B})f\right)d\mathbf{v} - \frac{q}{2}\int \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}(v^2)(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B})f\, d\mathbf{v} -$$

$$-\frac{q}{2}\int \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot v^2 f\, d\mathbf{v} =$$

Далее используем:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial(v^2)}{\partial \mathbf{v}} &= \frac{\partial}{\partial v_x}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial v_y}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial v_z}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\mathbf{e}_z = \\ &= 2(v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z) = 2\mathbf{v}\end{aligned}}$$

$$= \frac{q}{2}\int_{S\to\infty} v^2 f(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{dS_v} - \frac{q}{2}\int 2\left(\mathbf{v}\cdot(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B})\right)f\, d\mathbf{v} - \frac{q}{2}\int \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B})v^2 f\, d\mathbf{v} =$$

Можно показать, что все члены кроме одного равны нулю.

$$= -q\int (\mathbf{E}\cdot\mathbf{v})f\, d\mathbf{v} = -qn\mathbf{E}\cdot\mathbf{u}$$

Таким образом получается

$$\frac{q}{2}\int v^2(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B})\frac{\partial f}{\partial\mathbf{v}}d\mathbf{v}=-qn\mathbf{E}\cdot\mathbf{u}. \tag{1.57}$$

Подставляя (1.55)–(1.57) в (1.54), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}nmu^2+\frac{1}{2}P_{ii}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}nmu^2u_i+\frac{1}{2}P_{jj}u_i+u_jP_{ij}+Q_i\right)-q\,n\,E_iu_i=0. \tag{1.58}$$

Запишем уравнение (1.58) для ионов и электронов по отдельности и сложим их. Пренебрегая членами порядка m_e/m_i, получим при условии $u_e\approx u_p\approx U$ (однако $w_e\neq w_p$)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho U^2+\frac{1}{2}(P^p_{ii}+P^e_{ii})\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\rho U^2U_i+\frac{1}{2}(P^p_{jj}+P^e_{jj})U_i+U_j(P^p_{ij}+P^e_{ij})+(Q^p_i+Q^e_i)\right)-(E_ij_i)=0. \tag{1.59}$$

Далее берем $P_{ij}=P^p_{ij}+P^e_{ij}$ и $Q_i=Q^p_i+Q^e_i$. Примем во внимание теорему Пойнтинга:

$$\operatorname{div}\mathbf{S}+\frac{\partial}{\partial t}(W_{em})+\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}=0, \tag{1.60}$$

где $\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]$ — вектор Пойнтинга, и $W_{em}=\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})=\frac{1}{8\pi}(E^2+B^2)$. Подставляя $\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}$ из (1.60) в (1.59), получаем в изотропном приближении (при $P_{xx}=P_{yy}=P_{zz}=P$):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho U^2+\frac{3}{2}P+W_{em}\right)=-\operatorname{div}\left(\frac{1}{2}\rho U^2\mathbf{U}+\frac{3}{2}P\mathbf{U}+P\mathbf{U}+\mathbf{Q}+\mathbf{S}\right), \tag{1.61}$$

$$\frac{1}{2}P_{jj}=\frac{3}{2}P=\frac{P}{\gamma-1},\qquad\left(\text{т.к. при показателе адиабаты }\gamma=\frac{5}{3}:\ \frac{1}{\gamma-1}=\frac{3}{2}\right).$$

Как известно $P+\dfrac{P}{\gamma-1}=\dfrac{\gamma}{\gamma-1}P$ — это энтальпия или тепловая функция.

Перепишем (1.61) в других обозначениях

$$\frac{\partial}{\partial t}(E_{tot})=-\operatorname{div}\left(\mathbf{U}(\frac{1}{2}\rho U^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}P)+\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]+\mathbf{Q}\right), \tag{1.62}$$
$$\text{где}\quad E_{tot}=\frac{1}{2}\rho U^2+\frac{P}{\gamma-1}+\frac{B^2}{8\pi}$$

Таким образом, записав соотношения для нулевого (1.48), первого (1.53) и второго (1.62) моментов кинетического уравнения Больцмана, мы получили законы сохранения массы, импульса и энергии, соответственно. Если к этим уравнениям добавить уравнения Максвелла, то получится система уравнений изотропной магнитной гидродинамики:

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\\
&\operatorname{div}\mathbf{B} = 0\\
&\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\\
&\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho_e.
\end{aligned}
$$

Однако мы не сможем решить эту систему, пока не определим величину теплового потока $\mathbf{Q}$ в (1.62). В бесстолкновительной космической плазме оправданно считать $\mathbf{Q} = 0$.

Дополнительные вопросы:

1. Использовалось ли при выводе уравнений (1.48), (1.53) и (1.62) предположение о бездиссипативности? Как можно упростить систему уравнений МГД?
2. В каких случаях вместо закона сохранения энергии можно использовать уравнение состояния

$$\frac{d}{dt}\left(p/\rho^{\gamma}\right) = 0 \ \ ?$$

§ 6. Тензор давления. Двух-адиабатические МГД уравнения.

В случае неизотропной плазмы давление является тензором, выражающимся через диадное произведение $\mathbf{ww}$ (1.51).

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_x w_x & w_x w_y & w_x w_z \\ w_y w_x & w_y w_y & w_y w_z \\ w_z w_x & w_z w_y & w_z w_z \end{pmatrix} nm \tag{1.63}$$

Рассмотрим замкнутую поверхность S в плазме и малый элемент dS на этой поверхности с вектором нормали $\mathbf{e}_n = \mathbf{e}_x$. Тогда сила, действующая на dS, равна:

$$+\hat{P}\mathbf{e}_n = nm < \mathbf{w}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_n) >= nm w_x w_x \mathbf{e}_x + nm w_y w_x \mathbf{e}_y + nm w_z w_x \mathbf{e}_z$$

Этот результат вытекает из следующих рассуждений:
1) $n(\mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_n)$ — направленная наружу через dS плотность потока частиц;
2) $nm\mathbf{w}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{e}_n)$ — плотность направленного наружу потока импульса.

Если $\mathbf{e}_n = (1,0,0)$, тогда $\hat{P}\cdot\mathbf{e}_n = P_{xx}\mathbf{e}_x + P_{yx}\mathbf{e}_y + P_{zx}\mathbf{e}_z$ — это сила, действующая на единичную площадку перпендикулярную оси x. Сила сжатия–растяжения P_{xx} направлена вдоль $\mathbf{x}$, а касательные напряжения P_{yx} и P_{zx}, действующие на ту же площадку с нормалью $\mathbf{e}_x$, направлены по $\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{e}_z$ соответственно.

Таким образом, внедиагональные члены описывают силы вязкости, т.е. передачу момента, направленного перпендикулярного к нормали к площадке

$$\hat{P}\mathbf{e}_y = (P_{xx}\cdot 0 + P_{xy}\cdot 1 + P_{xz}\cdot 0)\mathbf{e}_x + \ldots\ = P_{xy}\mathbf{e}_x + P_{yy}\mathbf{e}_y + P_{zy}\mathbf{e}_z.$$

Рассмотрим адиабатическое приближение для бесстолкновительной плазмы в сильном магнитном поле. Это достаточно типично для космической плазмы, где ларморовский радиус частиц обычно много меньше характерного масштаба изменения параметров. Таким образом, анизотропия тензора давления вызвана наличием магнитного поля.

Предположим, что $\mathbf{B}$ направлено по оси z, тогда

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} P_\perp & 0 & 0 \\ 0 & P_\perp & 0 \\ 0 & 0 & P_\parallel \end{pmatrix}.$$

В общем случае для произвольного направления $\mathbf{B}$:

$$P_{ij} = P_\parallel b_i b_j + P_\perp(\delta_{ij} - b_i b_j), \quad \text{где } \mathbf{b} = \mathbf{B}/|B|. \tag{1.64}$$

Перепишем уравнение движения (1.53) для анизотропного давления. Производная тензора давления имеет вид:

$$\nabla P_{ij} = \nabla(P_\parallel b_i b_j) + \nabla(P_\perp(\delta_{ij} - b_i b_j)) = \nabla P_\perp + \nabla((P_\parallel - P_\perp) b_i b_j) =$$
$$\partial_i P_\perp \mathbf{e}_i + \partial_j((P_\parallel - P_\perp) b_i b_j)\mathbf{e}_i = \partial_i P_\perp \mathbf{e}_i + (P_\parallel - P_\perp) b_i (\partial_j b_j)\mathbf{e}_i + b_j \partial_j((P_\parallel - P_\perp) b_i)\mathbf{e}_i$$

Использовав $\nabla\mathbf{B} = 0$, получим:

$$\nabla\hat{P} = \nabla P_\perp + (\mathbf{b}\nabla)\Big((P_\parallel - P_\perp)\mathbf{b}\Big). \tag{1.65}$$

Аналогично (1.9) получаем:

$$\mathbf{j}\times\mathbf{B} = -\frac{c}{4\pi}\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{B}) = -\frac{c}{4\pi}\left(\nabla\frac{B^2}{2} - (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B}\right). \tag{1.66}$$

Подставим (1.65) и (1.66) в (1.53) и получим уравнение движения в анизотропной магнитной гидродинамике:

$$\rho\left(\frac{\partial U}{\partial t} + (U\cdot\nabla)U\right) = -\nabla\left(P_\perp + \frac{B^2}{8\pi}\right) + (\mathbf{B}\nabla)\left(\frac{1}{4\pi} + \frac{P_\perp - P_\parallel}{B^2}\right)\mathbf{B}. \tag{1.67}$$

Уравнения Чу-Гольдбергера-Лоу (Chew,Goldberger,Low, 1956) определяют скорости изменения $P_\perp$ и $P_\parallel$. Чтобы их получить нужно уравнение Больцмана (1.14) домножить на $\mathbf{vv}$ и проинтегрировать по скоростям. Но можно получить аналогичный результат из более простых рассуждений. Используем два утверждения :

1) Если в идеальном бесстолкновительном газе движение в плоскости $\perp\mathbf{B}$ (2 степени свободы) происходит независимо от движения $\parallel\mathbf{B}$ (1 степень), то адиабатическое уравнение состояния имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{P_\perp^2 P_\parallel}{\rho^5} = 0. \tag{1.68}$$

2) Из сохранения магнитного момента $\mu = mv_\perp^2/2B$ можно вывести (т.к. $< v_\perp^2 > \approx P_\perp/\rho$) второе уравнение:

$$\frac{d}{dt}\frac{P_\perp}{\rho B} = 0. \tag{1.69}$$

В итоге, получается:

$$\frac{d}{dt}\frac{P_\perp}{\rho B} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{P_\| B^2}{\rho^3} = 0. \tag{1.70}$$

Можно рассмотреть простой случай: двумерное движение вмороженной плазмы в плоскости перпендикулярной $\mathbf{B}$. Тогда из условия вмороженности: $B/\rho = \mathrm{const}$.

$$\frac{d}{dt}\frac{P_\perp}{\rho^2} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{P_\|}{\rho} = 0. \tag{1.71}$$

В случае движения вдоль магнитного поля, B остается постоянным. Тогда:

$$\frac{d}{dt}\frac{P_\perp}{\rho} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{P_\|}{\rho^3} = 0. \tag{1.72}$$

Суть **Модели ограниченной анизотропии** (Denton et al., JGR 1994, Bounded anisotropy fluid model for ion temperature) состоит в том, что рост температурной анизотропии ионов в магнитосфере (в частности, в переходном слое) ограничен из-за развития плазменных неустойчивостей, зеркальной и ионно-циклотронной. Величина анизотропии обычно не превосходит некоторый порог, который в общем виде выражается как

$$P_\perp/P_\| = 1 + S_p \beta_{\|p}^{-\alpha_p}, \tag{1.73}$$

где, например, $S_p \approx 0.8$ и $\alpha_p \approx 0.5$, $\beta_{\|p} = 8\pi P_\|/B^2$. При развитии неустойчивостей происходит передача тепловой энергии с поперечных к продольной степени свободы.

В другом подходе (Hau et al., GRL, 1993) предполагается существование тепловых потоков, благодаря которым (1.70) записывается как

$$\frac{d}{dt}\frac{P_\perp}{\rho B^{\gamma_\perp - 1}} = 0, \quad \frac{d}{dt}\frac{P_\| B^{\gamma_\| - 1}}{\rho^{\gamma_\|}} = 0. \tag{1.74}$$

Для двухадиабатического случая используется $\gamma_\perp = 2$, $\gamma_\| = 3$, а для двухизотермического случая $\gamma_\perp = 1$, $\gamma_\| = 1$.

§ 7. Уравнения холловской МГД, обобщенный закон Ома.

Запишем (1.52) в приложении для электронов, добавив в него член, описывающий столкновения электронов и ионов (до этого мы столкновения не учитывали)

$$m_e\frac{d\mathbf{u}_e}{dt} = -e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{u}_e \times \mathbf{B}\right) - \frac{1}{n_e}\nabla P_e - m_e\nu_{ei}(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i), \tag{1.75}$$

где ν_{ei} — частота электрон – ионных столкновений. Данное уравнение, пренебрегая инерцией электронов (левая часть), может быть переписано в виде:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{u}_i \times \mathbf{B} + \frac{1}{nec}\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{1}{ne}\nabla P_e + \eta\mathbf{j}. \tag{1.76}$$

Как обычно для двухжидкостной плазмы $\mathbf{j} = ne(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$ и $\eta = m_e\nu_{ei}/(ne^2)$. Уравнение (1.76) называют **обобщенным законом Ома** для плазмы.

Здесь, **Холловский член** — $(\mathbf{j} \times \mathbf{B})/(nec)$. Последним членом $\eta\mathbf{j}$ в приближении бесстолкновительной плазмы пренебрегают. Применим $(\nabla\times)$ к (1.76):

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c}\nabla \times (\mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) - \frac{1}{c}\nabla \times \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{ne} - \frac{1}{n^2 e}\nabla n \times \nabla P_e. \qquad (1.77)$$

В (1.77) предполагается, что электронное давление P_e является скаляром. Если же электронное давление неизотропно и является тензором, то в последнем слагаемом будет стоять $\nabla \cdot \mathbf{P}_e$. Если $P_e = nkT_e$, и электронная температура постоянна, то последний член в (1.77) пропадает.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) - \nabla \times \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{B}}{ne}$$

При учете Холловского члена конфигурация магнитного поля в ряде задач становится значительно сложнее (например, в двумерной задаче появляется третья компонента поля).

В Холловской МГД учитывается то, что скорости движения электронной и ионной компоненты жидкости различны $(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) = \mathbf{j}/ne$. Такой подход важен на характерных масштабах L, меньших, чем длина инерции ионов $c/\omega_{pi} = (m_i c^2/4\pi n e^2)^{1/2}$, и имеющих характерное время τ, меньшее, чем циклотронный период ионов $\Omega_i^{-1} = m_i c/eB$. В настоящее время холловская МГД используется для численного моделирования динамики тонких токовых слоев, в частности при изучении магнитного пересоединения.

Дополнительные вопросы: 1. Как правильно выбрать МГД модель?

2 МГД ВОЛНЫ И РАЗРЫВЫ

§ 8. Линейные магнитогидродинамические волны

Запишем систему уравнений идеальной одножидкостной магнитной гидродинамики с изотропным давлением:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}(\rho \mathbf{v}) = 0 \\
&\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v}\right) = -\boldsymbol{\nabla}\left(P + \frac{B^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} \\
&\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_T + \boldsymbol{\nabla}\cdot((\frac{\rho v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}P)\mathbf{v} + \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}]) = 0 \\
&\text{где } \varepsilon_T = \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{P}{\gamma-1} + \frac{B^2}{8\pi} \\
&\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \\
&\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B} = 0 \\
&\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Линеаризуем (2.1), для чего представим все параметры в виде $f = f_0 + \acute{f}(t, \mathbf{x})$, где $\acute{f} < f_0$:

$$\rho = \rho_0 + \rho', \;\; P = P_0 + p', \;\; \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}, \;\; \mathbf{V} = \mathbf{v}, \;\; (V_0 = 0).$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \\
&\rho_0\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p' - \nabla\frac{\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{b}}{4\pi} + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B}_0\boldsymbol{\nabla})\mathbf{b} \\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{P'}{\gamma-1} + \frac{\mathbf{B}_0\cdot\mathbf{b}}{4\pi}\right) + \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}P'\mathbf{v} + \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\times\mathbf{B_0}]\right) = 0 \\
&\operatorname{div}\mathbf{b} = 0 \\
&\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B_0} = 0 \\
&\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Напомним, что

$$\operatorname{div}[\mathbf{E}\times\mathbf{B}] = \operatorname{rot}\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}_0 - \operatorname{rot}\mathbf{b}\cdot\mathbf{E} \approx -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}\cdot\mathbf{B}_0.$$

Рассматрим плоскую монохроматическую волну $\sim e^{-i(\omega t - kx)}$, распространяющуюся вдоль оси x ($\mathbf{k} = (k_x, 0, 0)$). Выберем оси координат таким образом, чтобы $\mathbf{B}_0 = (B_{0x}, B_{0y}, 0)$. Тогда:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega; \;\; \frac{\partial}{\partial x} = ik; \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

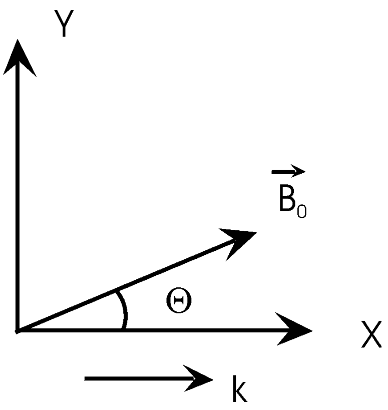

Рис. 1:

$$\operatorname{div}\mathbf{b}=0;\ \frac{\partial b_x}{\partial x}+\frac{\partial b_y}{\partial y}+\frac{\partial b_z}{\partial z}=0\rightarrow\frac{\partial b_x}{\partial x}=0;\ b_x=0.\ —$$

т.е. волна является поперечной к магнитному полю.

Система (2.2) сводится к:

$$\begin{aligned}
&-i\omega\rho'+\rho_0 ikv_x=0\\
&-i\omega\rho_0 v_x=-ikp'-i\frac{k}{4\pi}(0\ +B_{oy}b_y)+\ 0\\
&-i\omega\rho_0 v_y=0\ +i\frac{kB_{0x}}{4\pi}b_y\\
&-i\omega\rho_0 v_z=0\ +i\frac{kB_{0x}}{4\pi}b_z\\
&-i\omega\frac{P'}{\gamma-1}-i\frac{\omega}{4\pi}(0\ +B_{0y}b_y)+ik\frac{\gamma}{\gamma-1}P_0v_x+\frac{c}{4\pi}(-\frac{1}{c}(-i\omega\mathbf{b}\cdot\mathbf{B}_0))=0\\
&E_x=-\frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0]_x=\frac{1}{c}B_{0y}v_z\\
&E_y=-\frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0]_y=-\frac{1}{c}B_{0x}v_z\\
&E_z=-\frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0]_z=-\frac{1}{c}(v_xB_{0y}-v_yB_{0x})\\
&i\frac{\omega}{c}b_x=[\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}]_x=0\\
&i\frac{\omega}{c}b_y=[\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}]_y=-ikE_z\\
&i\frac{\omega}{c}b_z=[\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}]_z=ikE_y
\end{aligned}\tag{2.3}$$

Окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
&-\omega\rho' + \rho_0 k v_x = 0 & (a)\\
&+\omega\rho_0 v_x = kp' + \tfrac{B_{0y}}{4\pi}kb_y & (b)\\
&\omega\rho_0 v_y = -\tfrac{B_{0x}}{4\pi}kb_y & (c)\\
&\omega\rho_0 v_z = -\tfrac{B_{0x}}{4\pi}kb_z & (d)\\
&\omega\tfrac{p'}{\gamma-1} + \tfrac{B_{0y}}{4\pi}\omega b_y - \tfrac{\gamma}{\gamma-1}P_0 k v_x - \tfrac{B_{0y}}{4\pi}\omega b_y = 0 & (e)\\
&E_x = \tfrac{1}{c}B_{0y}v_z & (f)\\
&E_y = -\tfrac{1}{c}B_{0x}v_z & (g)\\
&E_z = -\tfrac{1}{c}B_{0y}v_x + \tfrac{1}{c}B_{0x}v_y & (h)\\
&\tfrac{\omega}{c}b_y = -kE_z & (i)\\
&\tfrac{\omega}{c}b_z = kE_y & (j)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Итак, мы получили систему из 10 уравнений с 10 переменными: p', ρ', v_x, v_y, v_z, b_y, b_z, E_x, E_y, E_z.

Нетрудно видеть, что в системе уравнений (2.4) можно выделить подсистему уравнений (d), (g) и (j), которая содержит переменные v_z, b_z и E_y:

$$\begin{aligned}
&\omega\rho_0 v_z + \tfrac{B_{0x}}{4\pi}kb_z = 0 & (a)\\
&kE_y - \tfrac{\omega}{c}b_z = 0 & (b)\\
&E_y + \tfrac{1}{c}B_{0x}v_z = 0 & (c)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Подставим E_y из (2.5c) в (2.5b):

$$\omega\rho_0 v_z + \frac{B_{0x}}{4\pi}kb_z = 0$$

$$+\frac{1}{c}B_{0x}kv_z + \frac{\omega}{c}b_z = 0$$

Чтобы система двух последних уравнений имела решение при любых v_z и b_z, ее определитель должен быть равен нулю:

$$\omega^2\rho_0 - (B_{0x}^2 k^2)/4\pi = 0.$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{B_{0x}^2}{4\pi\rho_0} = \frac{B_0^2\cos^2\Theta}{4\pi\rho_0} = V_a^2\cos^2\Theta \tag{2.6}$$

Мы получили дисперсионное уравнение для Альвеновской или промежуточной волны.

Продолжим анализ, исключив уравнение (2.4f), содержащее E_x. Остаются 6 уравнений с 6 неизвестными ρ', v_x, v_y, b_y, p', E_z:

$$\begin{aligned}
&-\omega\rho' + \rho_0 k v_x + 0\cdot v_y + 0\cdot b_y + 0\cdot p' + 0\cdot E_z = 0\\
&0\cdot\rho' + \omega\rho_0 v_x + 0\cdot v_y - \frac{B_{0y}}{4\pi} k b_y - k p' + 0\cdot E_z = 0\\
&0\cdot\rho' + 0\cdot v_x + \omega\rho_0 v_y + \frac{B_{0x}}{4\pi} k b_y + 0\cdot p' + 0\cdot E_z = 0\\
&0\cdot\rho' - \frac{\gamma}{\gamma-1} P_0 k\cdot v_x + 0\cdot v_y + 0\cdot b_y + \frac{\omega}{\gamma-1} P' + 0\cdot e_z = 0\\
&0\cdot\rho' - \frac{1}{c} B_{0y}\cdot v_x + \frac{1}{c} B_{0x} v_y + 0\cdot b_y + 0\cdot P' - 1\cdot E_z = 0\\
&0\cdot\rho' + 0\cdot v_x + 0\cdot v_y + \frac{\omega}{c} b_y + 0\cdot P' + k\cdot E_z = 0
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Система однородных линейных уравнений может иметь ненулевое решение лишь в том случае, когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix}
-\omega & \rho_0 k & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \omega\rho_0 & 0 & -\frac{B_{0y}}{4\pi}k & -k & 0\\
0 & 0 & \omega\rho_0 & \frac{B_{0x}}{4\pi}k & 0 & 0\\
0 & \frac{-\gamma}{\gamma-1}P_0 k & 0 & 0 & \frac{\omega}{\gamma-1} & 0\\
0 & -\frac{B_{0y}}{c} & \frac{B_{0x}}{c} & 0 & 0 & -1\\
0 & 0 & 0 & \frac{\omega}{c} & 0 & k
\end{vmatrix} = 0 \tag{2.8}$$

$D = \frac{1}{\pi c(\gamma-1)}\,\frac{1}{4}\omega(4\omega^4\pi\rho_0^2 - \omega^2 k^2(\rho_0 B_{0x}^2 + 4\gamma\pi\rho_0 P_0 + B_{0y}^2\rho_0^2) + k^4\cdot\gamma P_0 B_{0x}^2) = 0$

Поделив на k^5, получим дисперсионное уравнение:

$$\frac{\omega}{k}\left\{\left(\frac{\omega}{k}\right)^4 - \frac{\omega^2}{k^2}\left(\gamma\frac{P_0}{\rho_0} + \frac{B_{0x}^2 + B_{0y}^2}{4\pi\rho_0}\right) + \frac{B_{0x}^2}{4\pi\rho_0}\,\gamma\frac{P_0}{\rho_0}\right\} = 0, \tag{2.9}$$

или

$$u_\text{ф}(u_\text{ф}^4 - u_\text{ф}^2(C_s^2 + V_a^2) + C_s^2 V_a^2\cos^2\Theta) = 0, \tag{2.10}$$

где $u_\text{ф} = \omega/k$, $V_a^2 = B_0^2/(4\pi\rho_0)$, $C_s^2 = \gamma P_0/\rho_0$ и Θ – угол между направлениями $\mathbf{k}$ и $\mathbf{B}_0$.

Итак, существуют следующие решения (2.10):

1) $u_\text{ф} = 0$ — энтропийная волна, распространяющаяся со скоростью потока плазмы.

2) быстрая и медленная магнитозвуковые волны:

$$u_\text{ф}^2 = \{\frac{1}{2}(C_s^2 + V_a^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(C_s^2 + V_a^2)^2 - 4C_s^2 V_a^2\cos^2\Theta)}\} \tag{2.11}$$

C_F (быстрая) – соответствует знаку (+) перед корнем
C_{SL} (медленная) – соответствует знаку (−) перед корнем.

при $\Theta = \pi/2$

$$u_{\Phi}^2 = (\frac{1}{2}(C_s^2 + V_a^2) \pm \frac{1}{2}(C_s^2 + V_a^2) = \begin{cases} C_s^2 + V_a^2 \\ 0 \end{cases}$$

при $\Theta = 0$

$$u_{\Phi} = (\frac{1}{2}(C_s^2 + V_a^2) \pm \frac{1}{2}|V_a^2 - C_s^2|)^{1/2} = \begin{cases} max & (C_s, V_a) \\ min & (C_s, V_a) \end{cases}$$

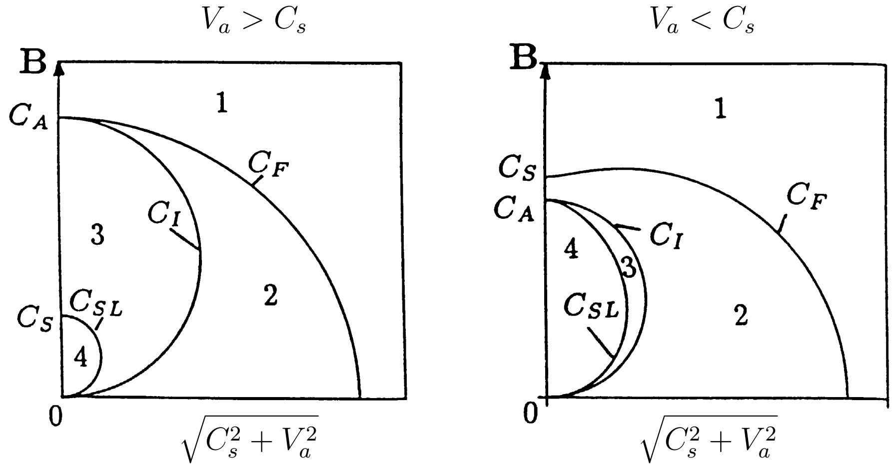

Рис. 2: Диаграмма Фридрихса для фазовой скорости.

Диаграмма показывает скорость распространения быстрой магнитозвуковой C_F, промежуточной (альфвеновской) $C_I = V_a \cos\Theta$ и медленной магнитозвуковой C_{SL} волн в зависимости от направления волнового вектора (т.е. от угла Θ). В солнечном ветре $V_a \simeq C_s$, но в магнитосфере обычно (за исключением плазменного слоя) $V_a > C_s$.

Основные свойства линейных МГД волн.

Итак, мы получили 4 типа волн: альвеновские (или промежуточные), энтропийные, быстрые и медленные магнитозвуковые. Рассмотрим, какие возмущения эти волны переносят. В уравнения (2.5), описывающие **альвеновскую волну**, входят поперечные компоненты скорости и магнитного поля v_z и b_z (z направлено перпендикулярно к $\mathbf{k}$ и к $\mathbf{B}_0$), и не входят плотность и давление. И, в действительности, альвеновские волны переносят поперечное возмущение скорости и магнитного поля. Когда в силу особенностей течения возникает "скручивание" магнитных силовых линий, появляется альвеновская волна, переносящая rot($\mathbf{b}$) вдоль силовых линий. Соответственно можно говорить о появлении продольных токов (т.к. $\mathbf{j} \simeq (c/4\pi)\,\mathrm{rot}\mathbf{b}$).

Чтобы узнать свойства **энтропийной волны**, нужно подставить $\omega/k = 0$ в систему (2.7). Тогда мы получим: $v_x = 0,\ v_y = 0,\ b_y = 0,\ p' = 0,\ E_z = 0$. Ненулевым может быть только ρ'. Чтобы удовлетворить $p' = 0$, плотность должна меняться в антифазе с температурой. Т.о. волна переносит изменение энтропии. Как отмечено ранее, энтропийная волна имеет нулевую скорость по отношению к потоку.

В быстрой и медленной магнитозвуковой волнах давление и модуль магнитного поля должны меняться. Воспользуемся уравнениями (2.4b) и (2.4e), полагая $v_x \neq 0,\ p' \neq 0,\ b_y \neq 0$. Подставим v_x из (2.4b) в (2.4e) и получим

$$p' = \gamma \frac{P_0}{\rho_0} \left(\frac{k}{\omega}\right)^2 (p' + \frac{B_{0y}}{4\pi} b_y).$$

Соответственно

$$\left(1 - \frac{C_s^2}{u_\text{ф}^2}\right) p' = \frac{C_s^2}{u_\text{ф}^2} \frac{B_{0y}}{4\pi} b_y.$$

Отсюда следует, что для того чтобы p' и $B_{0y} b_y$ имели один знак (т.е. были в фазе), необходимо

$$\left(1 - \frac{C_s^2}{u_\text{ф}^2}\right) > 0,$$

т.е.

$$\frac{C_s^2}{u_\text{ф}^2} < 1, \quad u_\text{ф} > C_s.$$

И, наоборот, если давление и магнитное поле меняются в противофазе, то

$$u_\text{ф} < C_s.$$

Первый случай соответствует быстрой, а второй – медленной магнитозвуковой волне (при $\Theta \neq 0$). Очевидно, что p' всегда в фазе с ρ'.

Полезно рассмотреть отдельно случай холодной плазмы, когда $\beta = P/P_B < 1$. Это типичные условия внутри магнитосферы. Поскольку тепловое давление мало, то можно пренебречь скоростью звука. Т.о. получаем из (2.11), что фазовая скорость быстрой магнитозвуковой волны $u_\text{ф} = V_a$ вне зависимости от направления, а скорость медленной магнитозвуковой волны нулевая. Скорость альвеновской волны не меняется: $u_\text{ф} = V_a \cos\Theta$.

Т.о. в холодной плазме распространяются 2 типа волн: волны сжатия (соответствующие быстрой магнитозвуковой моде) и поперечные (альвеновские) волны. Если существует точечный источник, то волны сжатия распространяются изотропно во все стороны, и их интенсивность уменьшается как r^{-1} (энергия $\sim r^{-2}$), а поперечные волны распространяются вдоль магнитного поля в идеальном случае без затухания (Тамао, 1964). Движение изотропной волны, согласно Тамао, приводит к появлению конвертированной поперечной волны.

§ 9. Условия Рэнкина–Гюгонио на разрывах.

МГД-разрыв в теории идеальной МГД представляет собой бесконечно тонкий переходный слой между двумя однородными и стационарными областями, заполненными плазмой с различающимися параметрами. Скачки различных физических величин на разрыве описываются законами сохранения, сформулированными в рамках МГД-теории.

Поскольку МГД-разрыв предполагается стационарным ($\partial/\partial t = 0$) и одномерным, МГД-уравнения (2.1) могут быть проинтегрированы по x при $\partial/\partial t = 0$, в результате чего и получаются условия на разрыве. Эти условия носят наименование условий Рэнкина-Гюгонио (Rankine–Hugoniot jump conditions). Опишем подробно, как получается условие непрерывности потока вещества. Возьмем уравнение неразрывности (1.48) в интегральной форме

$$\int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{dS} = 0.$$

Здесь и далее используется система отсчета, связанная с разрывом. Как было отмечено $\partial\rho/\partial t = 0$. Тогда суммарный поток через все границы равен нулю: $\sum \rho v_i dS_i = 0$. Пусть нормаль к разрыву лежит вдоль оси X. Поскольку разрыв считается бесконечно-тонким, то можно считать $dS_y = dS_z = 0$. Т.о. остается

$$\rho_1 v_{x1} dS_x - \rho_2 v_{x2} dS_x = 0$$

или

$$\rho_1 v_{x1} = \rho_2 v_{x2},$$

где ρ_1 и v_{x1} - скорость и нормальная компонента скорости до разрыва, а ρ_2 и v_{x2} - их значения после разрыва. Аналогичным образом получают остальные условия, приведенные ниже.

Итак, сформулируем все условия на разрыве (n – нормальные, а t – тангенциальные компоненты):

1) Непрерывность потока вещества

$$\{\rho v_n\} = 0 \tag{2.12}$$

Фигурные скобки показывают, что мы берем разность величин до и после разрыва.

2) Непрерывность нормальной компоненты магнитного поля (т.к. $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$):

$$\{B_n\} = 0 \tag{2.13}$$

3) Непрерывность потока энергии

$$\{q_n\} = 0, \tag{2.14}$$

$$\text{где} \qquad q_n = \rho v_n \left(\frac{v^2}{2} + w\right) + \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]_n$$

w — тепловая функция или энтальпия; $w = \varepsilon + \frac{P}{\rho}$, внутренняя энергия $\varepsilon = \frac{P}{\rho}\frac{1}{\gamma - 1}$.

$$w = \frac{P}{\rho}\left(1 + \frac{1}{\gamma - 1}\right) = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho}$$

В условиях вмороженности магнитного поля в плазму

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B};$$

$$\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]_n = -\frac{1}{4\pi}[[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B}]_n = \frac{1}{4\pi}[\mathbf{B} \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]]_n = \frac{1}{4\pi} v_n B^2 - \frac{1}{4\pi} B_n (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) =$$
$$= \frac{1}{4\pi}(v_n B_n^2 + v_n B_t^2 - B_n v_n B_n - B_n (v_t B_t))$$

Таким образом, равенство (2.14) можно записать в виде:

$$\{\rho v_n(\frac{v_n^2}{2}+\frac{v_t^2}{2}+w)+\frac{1}{4\pi}v_nB_t^2-\frac{1}{4\pi}B_n(\mathbf{v}_t\mathbf{B}_t)\}=0 \tag{2.15}$$

4) Непрерывность потока импульса получается из уравнения движения (1.53).

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right)=\frac{1}{c}\mathbf{j}\times\mathbf{B}-\nabla\cdot P$$

Подставим $\mathbf{j}$ из уравнений Максвелла, пренебрегая токами смещения:

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right)=-\frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\times[\nabla\times\mathbf{B}]-\nabla\cdot P \tag{2.16}$$

Перейдем к уравнению в консервативной форме (закону сохранения импульса), для этого в левой части должен стоять член $\partial(\rho\mathbf{v})/\partial t$:

$$\frac{\partial\rho\mathbf{v}}{\partial t}=\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+\mathbf{v}\frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

Теперь подставим $\rho\partial\mathbf{v}/\partial t$ из (2.16), а

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla(\rho\mathbf{v})$$

следует из уравнения неразрывности. Т.о.

$$\frac{\partial\rho\mathbf{v}}{\partial t}=-(\rho\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}-\mathbf{v}\nabla(\rho\mathbf{v})-\frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\times[\nabla\times\mathbf{B}]-\nabla\cdot P$$

Здесь появляется диадное произведение

$$(\rho\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}+\mathbf{v}\nabla(\rho\mathbf{v})=\rho v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+v_i\frac{\partial\rho v_k}{\partial x_k}=\frac{\partial(\rho v_iv_k)}{\partial x_k}=\nabla(\rho\mathbf{v}\mathbf{v}),$$

а согласно уравнению (1.66):

$$\mathbf{B}\times[\nabla\times\mathbf{B}]=\nabla\frac{B^2}{2}-(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B}=\nabla\left(\frac{B^2}{2}-\mathbf{B}\mathbf{B}\right).$$

В итоге, получаем:

$$\frac{\partial\rho\mathbf{v}}{\partial t}=-\nabla\left(\rho\mathbf{v}\mathbf{v}+\frac{B^2}{8\pi}-\frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\mathbf{B}+P\right). \tag{2.17}$$

Теперь уравнение записано в консервативной форме и из него можно стандартным способом получить условия на разрыве.

$$\{\Pi_{ik}\}=0$$

где

$$\Pi_{ik}=\rho v_iv_k+p\delta_{ik}+\frac{1}{8\pi}B^2\delta_{ik}-\frac{1}{4\pi}B_iB_k$$

Таким образом, имеем
непрерывность потока нормального импульса:

$$\{\Pi_{nn}\} = \{\rho v_n^2 + p + \frac{1}{8\pi}B^2 - \frac{1}{4\pi}B_n^2\} = \{\rho v_n^2 + p + \frac{1}{8\pi}B_t^2\} = 0 \tag{2.18}$$

непрерывность потока тангенциального импульса:

$$\{\Pi_{tn}\} = \{\rho v_n \mathbf{v}_t - \frac{1}{4\pi}B_n\mathbf{B}_t\} = 0 \tag{2.19}$$

5) Непрерывность тангенциальной компоненты электрического поля следует из того, что $\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0$. В интегральном виде это означает (при интегрировании вдоль замкнутого контура):

$$\int \mathbf{E}\cdot\mathbf{dl} = E_1 dl_y - E_2 dl_y = 0.$$

Т.о. условие на разрыве имеет вид:

$$\{\mathbf{E}_t\} = 0.$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B};$$

$$\mathbf{E}_t = -\frac{1}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]_t = \frac{1}{c}[v_n\mathbf{B}_t - \mathbf{v}_t B_n]$$

$$\{v_n\mathbf{B}_t - \mathbf{v}_t B_n\} = 0 \tag{2.20}$$

Итак, мы получили следующую систему уравнений:

$$\{\rho v_n\} = 0$$

$$\{B_n\} = 0$$

$$\{\rho v_n[(\tfrac{v_n^2}{2} + \tfrac{v_t^2}{2}) + \tfrac{P}{\rho} + \varepsilon]\} + \{\tfrac{1}{4\pi}v_n B_t^2 - \tfrac{B_n}{4\pi}(\mathbf{v}_t\mathbf{B}_t)\} = 0$$

$$\{\rho v_n^2 + p + \tfrac{1}{8\pi}B_t^2\} = 0$$

$$\{\rho v_n\mathbf{v}_t - \tfrac{1}{4\pi}B_n\mathbf{B}_t\} = 0$$

$$\{v_n\mathbf{B}_t - B_n\mathbf{v}_t\} = 0$$

Введем новую величину $j = \rho v_n$, нормальный к разрыву поток вещества, и $V = \frac{1}{\rho}$, удельный объем, запишем уравнения в окончательном виде

$$\{j\} = 0; \tag{2.21}$$

$$\{B_n\} = 0; \tag{2.22}$$

$$j\{\frac{1}{2}j^2V^2 + \frac{v_t^2}{2} + pV + \varepsilon + \frac{V}{4\pi}B_t^2\} = \frac{B_n}{4\pi}\{(\mathbf{v}_t \cdot \mathbf{B}_t)\}; \tag{2.23}$$

$$\{p + j^2V + \frac{1}{8\pi}B_t^2\} = 0; \tag{2.24}$$

$$j\{\mathbf{v}_t\} = \frac{B_n}{4\pi}\{\mathbf{B}_t\}; \tag{2.25}$$

$$j\{V\mathbf{B}_t\} = B_n\{\mathbf{v}_t\}. \tag{2.26}$$

Это и есть условия Рэнкина–Гюгонио. Они должны выполняться на любом разрыве.

§ 10. Классификация МГД разрывов.

В § 8 было показано, что в линейном приближении в МГД можно выделить 4 типа волн: энтропийная, быстрая магнитозвуковая, медленная магнитозвуковая и альвеновская (или промежуточная). В линейном приближении волны распространяются в однородной среде без изменения своей формы. Однако, в действительности, уравнения МГД нелинейные, а космическая плазма – среда неоднородная, поэтому увидеть плоские гармонические волны вам вряд ли удастся. Зато можно увидеть разрывы, являющие результатом нелинейного развития МГД волн.

Появление разрыва из линейной волны можно получить, если показать, что скорость распространения волны $u_ф$ меняется в зависимости от амплитуды волны. Например, в отсутствии магнитного поля быстрая магнитозвуковая волна распространяется с фазовой скоростью, равной скорости звука $u_ф = \sqrt{\gamma P/\rho}$. В адиабатическом случае это означает, что $u_ф \sim \sqrt{\rho^{\gamma-1}}$. Т.о. участки с большей плотностью распространяются быстрее, чем участки с меньшей плотностью, что и приводит к укручению фронта.

Разные типы разрывов получают, задавая дополнительные ограничения на разрыве :

1) при $j = 0$; $B_n = 0$ получается тангенциальный разрыв;
2) $j = 0$; $B_n \neq 0$ — контактный разрыв;
3) $j \neq 0$; $B_n \neq 0$; $\{V\} = 0$ — вращательный разрыв;
4) $j \neq 0$; $B_n \neq 0$; $\{V\} \neq 0$ — ударные волны.

Рассмотрим каждый из разрывов подробнее.

1) *Тангенциальный разрыв*

Условие $j = 0$ означает, что разрыв движется со скоростью окружающей плазмы, также как энтропийная волна. Система (2.21)–(2.26) сводится к одному уравнению:

$\{0\} = 0$

$\{B_n\} = 0$

$0 = 0$

$\{p + \frac{1}{8\pi}B_t^2\} = 0$ — *единственное условие: равенство давлений с обеих сторон разрыва.*

$0 = 0$

$0 = 0$

2) *Контактный разрыв*

$$j = 0;\ B_n \neq 0$$

Система (2.21)–(2.26) сводится к:

$\{j\} = 0$

$\{B_n\} = 0$

$0 = B_n\{\mathbf{v}_t \cdot \mathbf{B}_t\}$ *удовлетворяется при учете двух последних равенств*

$\{p + \frac{1}{8\pi}B_t^2\} = 0 \quad \rightarrow \quad \{p\} = 0$

$0 = \frac{B_n}{4\pi}\{B_t\} \quad \rightarrow \quad \{\mathbf{B}_t\} = 0$

$0 = B_n\{\mathbf{v}_t\} \quad \rightarrow \quad \{\mathbf{v}_t\} = 0$

Если на тангенциальном разрыве могут меняться плотность, температура, модуль и направление магнитного поля, то на контактном разрыве только плотность и температура, причем так, чтобы тепловое давление сохранялось.

3) *Вращательный разрыв*

$$j \neq 0;\ B_n \neq 0;\ \{V\} = 0$$

Из уравнений (2.25) и (2.26) следует:

$$j^2 V\{\mathbf{v}_t\}\{\mathbf{B}_t\} = \frac{B_n^2}{4\pi}\{\mathbf{B}_t\}\{\mathbf{v}_t\}. \tag{2.27}$$

$$\boxed{j^2 = \frac{B_n^2}{4\pi V}} \rightarrow \rho^2 v_n^2 = \frac{B_n^2\rho}{4\pi} \rightarrow v_n^2 = \frac{B_n^2}{4\pi\rho} \tag{2.28}$$

Т.е. разрыв движется с альфвеновской скоростью относительно окружающей плазмы. Подставляя полученную величину j^2 в любое из уравнений (2.25) или (2.26), находим

$$\frac{B_n\{\mathbf{v}_t\}}{\sqrt{4\pi V}} = \frac{B_n}{4\pi}\{\mathbf{B}_t\}; \to \{\mathbf{v}_t\} = \frac{\sqrt{4\pi V}}{4\pi}\{\mathbf{B}_t\} = \frac{\{\mathbf{B}_t\}}{\sqrt{4\pi\rho}} \text{ — Walen relation.} \tag{2.29}$$

При этом мы видим, что скачок $\mathbf{v}_t$ параллелен скачку $\mathbf{B}_t$.

Но почему разрыв называется вращательным? Рассмотрим уравнение (2.23):

$$j\{\frac{v_t^2}{2} + pV + \varepsilon + \frac{V}{4\pi}B_t^2\} = \frac{B_n}{4\pi}\{\mathbf{v}_t \cdot \mathbf{B}_t\} = j\frac{\sqrt{4\pi V}}{4\pi}\{\mathbf{v}_t \cdot \mathbf{B}_t\}$$

$$\{\varepsilon\} + V\{p + \frac{B_t^2}{8\pi}\} + \frac{1}{2}\{v_t^2 + (\sqrt{\frac{V}{4\pi}} \cdot B_t)^2 - \frac{1}{2\pi}\sqrt{4\pi V}(\mathbf{B}_t \cdot \mathbf{v}_t)\} = 0$$

Вторая фигурная скобка в последнем выражении равна нулю согласно (2.24), поэтому:

$$\{\varepsilon\} + \frac{1}{2}\{(\mathbf{v}_t - \sqrt{\frac{V}{4\pi}}\mathbf{B}_t)^2\} = 0$$

Из (2.29) следует: $\{\varepsilon\} = 0$, т.е. $\{\frac{p}{\rho}\frac{1}{\gamma-1}\} = 0$.

Т.к. $\{\rho\} = 0$, то $\{p\} = 0$. Но тогда из (2.24): $\{B_t^2\} = 0$ Т.о. модуль $\mathbf{B}_t$ сохраняется, но вектор поля вращается вокруг нормали к поверхности разрыва.

4) *Ударная волна*

$$j \neq 0;\ B_n \neq 0;\ \{V\} \neq 0$$

При таких условиях требуется учитывать всю систему уравнений (2.21)–(2.26).

Прежде всего, докажем теорему компланарности, то есть покажем, что векторы $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ и $\mathbf{n}$ лежат в одной плоскости. Для этого воспользуемся уравнениями (2.25) и (2.26):

$\{\mathbf{v}_t\} = \frac{B_n}{4\pi j}\{\mathbf{B}_t\}$

$\{\mathbf{v}_t\} = \frac{j}{B_n}\{V\mathbf{B}_t\}$

Слева — один и тот же вектор. Стало быть, $\{\mathbf{B}_t\} \| \{V\mathbf{B}_t\}$:
$\mathbf{B}_{t1} - \mathbf{B}_{t2} = (V_1\mathbf{B}_{t1} - V_2\mathbf{B}_{t2}) \cdot \mathrm{const}$

Единственно возможный вариант, это когда $\mathbf{B}_{t2} \| \mathbf{B}_{t1}$.

Выведем теперь соотношения между параметрами потока по обе стороны разрыва, называющееся ударной адиабатой Гюгонио. Перемножив (2.25) и (2.26), получаем:

$$j^2\{\mathbf{v}_t\}\{V\mathbf{B}_t\} = \frac{B_n^2}{4\pi}\{\mathbf{B}_t\}\{\mathbf{v}_t\}$$

$$j^2 = \frac{B_n^2}{4\pi}\frac{\{\mathbf{B}_t\}}{\{V\mathbf{B}_t\}} \tag{2.30}$$

С другой стороны, из (2.24) имеем:

$$j^2 = -\frac{\{p + \frac{B_t^2}{8\pi}\}}{\{V\}} \tag{2.31}$$

Преобразуем теперь уравнение (2.23):

$$\left\{\frac{1}{2}j^2V^2 + \frac{v_t^2}{2} + pV + \varepsilon + \frac{V}{4\pi}B_t^2\right\} = \frac{B_n}{4\pi j}\cdot\{\mathbf{v}_t\cdot\mathbf{B}_t\}.$$

Сгруппируем второе слагаемое слева и правую часть:

$$\left\{\frac{v_t^2}{2}\right\} - \frac{B_n}{4\pi j}\{\mathbf{v}_t\mathbf{B}_t\} = \frac{1}{2}\left\{\mathbf{v}_t - \frac{B_n}{4\pi j}\mathbf{B}_t\right\}^2 - \frac{1}{2}\left\{\frac{B_n^2B_t^2}{16\pi^2j^2}\right\} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{B_n^2B_t^2}{16\pi^2j^2}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{B_n^2\{B_t^2\}}{16\pi^2\frac{B_n^2\{\mathbf{B}_t\}}{4\pi\{VB_t\}}} = \frac{-1}{8\pi}\,\frac{\{B_t^2\}\{V\mathbf{B}_t\}}{\{\mathbf{B}_t\}}.$$

Перепишем (2.23):

$$\left\{\frac{1}{2}j^2V^2 + pV + \varepsilon + \frac{VB_t^2}{4\pi} - \frac{\{B_t^2\}\{V\mathbf{B}_t\}}{8\pi\{\mathbf{B}_t\}}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\{p+\frac{B_t^2}{8\pi}\}}{\{V\}}\{V^2\} + \{pV\} + \{\varepsilon\} - \frac{1}{8\pi}\frac{\{B_t^2\}\{V\mathbf{B}_t\}}{\{B_t\}} + \frac{\{VB_t^2\}}{4\pi} = 0;$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{(p_1 - p_2 + \frac{B_{t1}^2 - B_{t2}^2}{8\pi})(V_1 - V_2)(V_1 + V_2)}{(V_1 - V_2)} + p_1V_1 - p_2V_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

$$-\frac{1}{8\pi}\,\frac{(B_{t1}^2 - B_{t2}^2)(V_1B_{t1} - V_2B_{t2})}{(B_{t1} - B_{t2})} + \frac{V_1B_{t1}^2 - V_2B_{t2}^2}{4\pi} = 0;$$

$$-\frac{1}{2}(p_1 - p_2 + \frac{B_{t1}^2}{8\pi} - \frac{B_{t2}^2}{8\pi})(V_1 + V_2) + p_1V_1 - p_2V_2 - \frac{1}{8\pi}(V_1B_{t1} - V_2B_{t2})(B_{t1} + B_{t2}) +$$

$$+\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \frac{V_1B_{t1}^2 - V_2B_{t2}^2}{4\pi} = 0;$$

$$-\frac{1}{2}p_1V_1 + \frac{1}{2}p_2V_1 - \frac{1}{2}p_1V_2 + \frac{1}{2}p_2V_2 - \frac{B_{t1}^2}{16\pi}V_1 - \frac{B_{t1}^2}{16\pi}V_2 + \frac{B_{t2}^2}{16\pi}V_1 + \frac{B_{t2}^2}{16\pi}V_2 +$$

$$+p_1V_1 - p_2V_2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \frac{1}{8\pi}V_1B_{t1}^2 - \frac{1}{8\pi}V_1B_{t1}B_{t2} + \frac{1}{8\pi}V_2B_{t1}B_{t_2} + \frac{1}{8\pi}V_2B_{t2}^2 +$$

$$+\frac{1}{4\pi}V_1B_{t1}^2 - \frac{1}{4\pi}V_2B_{t2}^2 = 0;$$

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(p_1V_1 + p_2V_1 - p_1V_2 - p_2V_2) + \frac{1}{16\pi}V_1B_{t1}^2 - \frac{1}{16\pi}V_2B_{t2}^2 - \frac{B_{t1}^2V_2}{16\pi} +$$

$$+V_1\frac{B_{t2}^2}{16\pi} - \frac{1}{8\pi}V_1B_{t1}B_{t2} + \frac{1}{8\pi}V_2B_{t1}B_{t2} = 0;$$

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(p_2 + p_1)(V_1 - V_2) + \frac{1}{16\pi}(V_1 - V_2)(B_{t1} - B_{t2})^2 = 0 \qquad (2.32)$$

Мы получили уравнение ударной адиабаты Гюгонио.

Рассмотрим ударную волну в приближении слабого магнитного поля. Тогда скачки газовых параметров можно вычислить в предположении $B_n = B_t = 0$. Уравнение (2.32) в этом случае сводится к:

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_1 - V_2) = 0 \tag{2.33}$$

$$\frac{1}{\gamma - 1}\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right) + \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}) = 0$$

Умножим последнее уравнение на ρ_2:

$$\frac{1}{(\gamma - 1)} \cdot (p_1\frac{\rho_2}{\rho_1} - p_2) + \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1) = 0$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}\left(\frac{p_1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}(p_1 + p_2)\right) = \frac{p_2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{2p_1 + \gamma p_1 + \gamma p_2 - p_1 - p_2}{2(\gamma - 1)} = \frac{2p_2 + \gamma p_1 + \gamma p_2 - p_1 - p_2}{2(\gamma - 1)}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{p_1(\gamma + 1) + p_2(\gamma - 1)}{2(\gamma - 1)} = \frac{p_2(\gamma + 1) + p_1(\gamma - 1)}{2(\gamma - 1)}.$$

$$\boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)p_2 + (\gamma - 1)p_1}{(\gamma - 1)p_2 + (\gamma + 1)p_1}} \tag{2.34}$$

Уравнение (2.34) определяет зависимость ρ_2/ρ_1 от p_2/p_1, но как найти p_2/p_1?

Пусть нам известно число Маха перед фронтом ударной волны: ($M_1 = v_{n1}/C_s$). Если $M_1 >> 1$, то мы имеем дело с сильной ударной волной. Из равенства (2.31) при $B_t = 0$ имеем:

$$j^2 = v_{n1}^2\rho_1^2 = -\frac{\{p\}}{\{V\}} = \frac{p_1 - p_2}{V_2 - V_1}$$

$$v_{n1}^2\rho_1^2 = \frac{p_1 - p_2}{\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}};\; v_{n1}^2 = \frac{p_2 - p_2}{\rho_1^2(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1})} = \frac{\rho_2}{\rho_1^2}\frac{p_1 - p_2}{(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1})}$$

В данном случае, число Маха может быть выражено через скачок давления

$$M_1^2 = \frac{v_{n1}^2}{C_s^2} = \frac{\rho_2}{\rho_1^2}\frac{p_1 - p_2}{\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) \cdot \gamma\frac{p_1}{\rho_1}} = \frac{1}{\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1}\frac{p_1 - p_2}{\gamma p_1} =$$

$$= \frac{p_1 - p_2}{\gamma p_1}\frac{1}{\left(\frac{(\gamma-1)p_2 + (\gamma+1)p_1}{(\gamma+1)p_2 + (\gamma-1)p_1} - 1\right)} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma p}\frac{1}{\frac{\gamma p_2 - p_2 + \gamma p_1 + p_1 - \gamma p_2 - p_2 - \gamma p_1 + p_1}{(\gamma+1)p_2 + (\gamma-1)p_1}} =$$

$$= \frac{(p_1 - p_2)}{\gamma p_1}\frac{[(\gamma + 1)p_2 + (\gamma - 1)p_1]}{2(p_1 - p_2)} = \frac{\gamma + 1}{2\gamma}\frac{p_2}{p_1} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} = M^2 >> 1.$$

$$\frac{p_2}{p_1} \simeq M_1^2 \cdot \frac{2\gamma}{\gamma + 1}$$

$$\text{Например, при } M_1 = 8: \ \frac{p_2}{p_1} = 64 \cdot \frac{10}{8} = 80$$

Таким образом, при $p_2 >> p_1$ равенство (2.34) сводится к:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \approx 4$$

$$\rho v = \text{const}; \qquad \frac{v_2}{v_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} = \frac{1}{4};$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2/\rho_2}{p_1/\rho_1} = 80 \cdot \frac{1}{4} = 20.$$

Скачок магнитного поля найдем из соотношения (2.30):

$$j^2\{V\mathbf{B}_t\} = \frac{B_n^2}{4\pi}\{\mathbf{B}_t\}.$$

Справа — малая величина 3-го порядка малости. Значит, слева — тоже величина 3-го порядка малости. Отсюда:

$$\{V\mathbf{B}_t\} = 0; \quad V_1 B_{t1} = V_2 B_{t2}; \quad \frac{B_{t2}}{B_{t1}} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 4$$

Дополнительные вопросы: 1. Какие разрывы чаще всего встречаются в солнечном ветре, а какие крайне редко?

§ 11. Условия эволюционности ударных волн (см. Ландау и Лифшиц, Теоретическая физика, т. VIII, Электродинамика сплошных сред, 1992, § 73)

Под эволюционностью МГД разрыва понимается его устойчивость относительно расщепления на два (или более) разрыва. В отличии от обычной неустойчивости, означающей постепенное возрастание начального малого возмущения, в неэволюционном разрыве возмущение сразу делается большим (хотя при малых t оно занимает еще малую область пространства). Пример такого расщепления показан на рисунке:

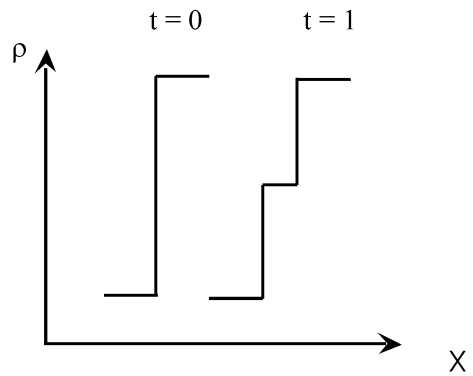

Рис. 3:

Условие эволюционности можно получить путем подсчета числа независимых параметров, определяющих произвольное начальное малое возмущение разрыва, и числа уравнений (линеаризованных граничных условий), которым они должны удовлетворять. Разрыв эволюционен, если оба числа одинаковы.

Подсчитаем число уравнений, которым должно удовлетворять произвольное малое возмущение на поверхности разрыва.

Пусть разрыв лежит в плоскости YZ; нормаль к ударной волне направлена по оси X; положительное направление X совпадает с направлением нормальной компоненты скорости газа. Невозмущенные поля $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ и скорости газа $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ лежат в плоскости XY (это возможно по теореме компланарности). С каждой стороны разрыва подвергаются возмущению 7 величин: v_x, v_y, v_z, B_y, B_z, ρ и энтропия S. Нормальная компонента магнитного поля B_n (она же B_x) непрерывна и возмущению не подвергается. Возмущения p, w и ε определяются возмущениями ρ и S. Кроме того, может иметь место возмущение скорости движения самой ударной волны δU. Однако в силу непрерывности потока массы j через разрыв величина δU может быть выражена через возмущения ρ и v_x и, следовательно, не является независимой переменной.

Подсчитаем теперь число уравнений, описывающих эти возмущения. Линеаризация уравнений непрерывности потока импульса Π_{zn} (z компонента уравнения (2.25)) и E_y компонента электрического поля (z компонента уравнения (2.26)) дает при $v_{0z} = 0$

$$\{\rho v_x \delta v_z - \frac{B_x}{4\pi}\delta B_z\} = 0; \tag{2.35}$$

$$\{v_x \delta B_z - B_x \delta v_z\} = 0. \tag{2.36}$$

Уравнения (2.35) и (2.36) содержат только 2 переменные: δB_z и δv_z — и описывают возмущения $\delta\mathbf{B}$ и $\delta\mathbf{v}$, перпендикулярные $\mathbf{B}_0(B_x, B_y)$, то есть альфвеновского типа.

Уравнения непрерывности потока импульсов Π_{xx} (2.24) и Π_{yx} (2.25), потока энергии (2.23) и E_z компоненты электрического поля (2.26), то есть всего четыре уравнения, содержат 5 переменных: $\delta\rho$, δv_x, δv_y, δB_y и δS — и, следовательно, являются недостаточными для их описания. Соответственно, МГД ударная волна в общем случае не является эволюционной, и для того, чтобы она была устойчивой относительно расщепления, требуется выполнение каких-то дополнительных условий.

При этом, поскольку увеличить число уравнений мы не можем, эти условия сводятся к исключению какой-то из переменных. Рассмотрим эти условия. Прежде всего, заметим, что возмущения, зависящие от времени как e^{-iwt}, распространяются в обе стороны от разрыва в виде МГД-волн четырех типов: альфвеновские, быстрые и медленные магнитозвуковые, и энтропийная волна. В каждой волне изменения всех величин связаны друг с другом определенными соотношениями; поэтому каждая волна определяется всего одним параметром — амплитудой какой-либо одной величины.

Условии эволюционности заключается в том, чтобы число уходящих волн равнялось числу независимых переменных, задающих возмущение. Поскольку уравнения для альфвеновских волн и для магнитозвуковых (и энтропийных) волн расщепляются, условия эволюционности должны быть выполнены по отдельности для этих групп волн.

а) Альфвеновские волны

Поскольку они описываются двумя уравнениями, то и уходящих волн должно быть две. Фазовые скорости этих волн с учетом скорости потока равны

$$u_{\text{ф}1} = v_{x1} \pm v_{a1}, \quad \text{и } u_{\text{ф}2} = v_{x2} \pm v_{a2},$$

где $v_a = B_n/\sqrt{4\pi\rho}$, v_{x1} и v_{x2} — скорости потока до и после разрыва соответственно.

Перед фронтом ударной волны альфвеновская волна с $\mathbf{k}_x > 0$ всегда является приходящей. Волна с $\mathbf{k}_x < 0$ является уходящей при $v_{a1} > v_{x1}$ и приходящей (то есть сносится потоком к разрыву) при $v_{x1} > v_{a1}$. За фронтом ударной волны, альфвеновская волна с $\mathbf{k}_x > 0$ всегда является уходящей. Волна с $\mathbf{k}$-вектором, направленным к разрыву, является уходящей, то есть сносится потоком от разрыва, если $v_{a2} < v_{x2}$.

Таким образом, существуют две области эволюционности разрыва относительно альфвеновских волн:

1. $v_{x1} > v_{a1}$, $v_{x2} > v_{a2}$; тогда слева нет ни одной уходящей волны, но справа их две.

2. $v_{x1} < v_{a1}$, $v_{x2} < v_{a2}$ — слева одна уходящая волна и справа одна уходящая волна. Эти области отмечены на рисунке вертикальной штриховкой.

б) Энтропийная и магнитозвуковые волны

Как мы видели, в этом случае имеются четыре уравнения, которые, соответственно, должны описывать четыре уходящие волны. Одна уходящая энтропийная волна (справа от разрыва) существует всегда. Следовательно, число уходящих магнитозвуковых волн должно равняться трем.

1. Если $v_{x1} > u_{\delta 1}$ (и, тем более, $> u_{M1}$), то слева от разрыва уходящих волн нет. Следовательно, справа их должно быть (кроме энтропийной волны) три. Две уходящие волны справа существуют всегда: это быстрая и медленная магнитозвуковые волны с $\mathbf{k}_x > 0$. Следовательно, из двух волн с $\mathbf{k}_x < 0$ должна остаться одна. Очевидно, что уходящей может быть медленная волна, сносимая от разрыва потоком плазмы. При этом быстрая волна должна быть приходящей. Это возможно в том случае, когда

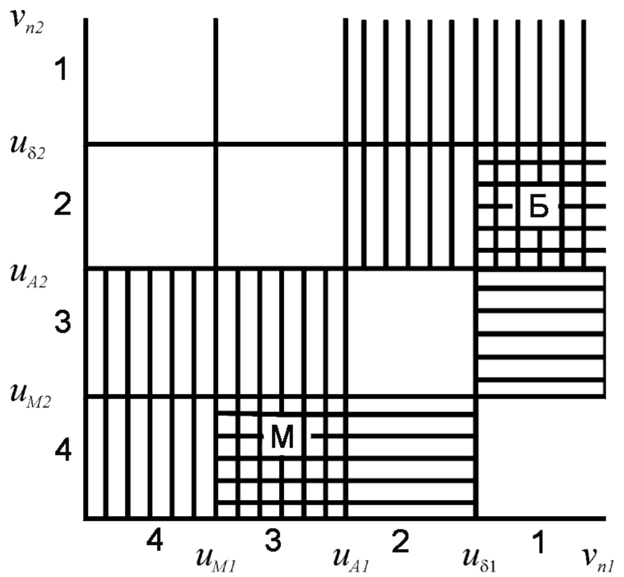

Рис. 4:

$$v_{\delta 2} > v_{x2} > v_{M2},$$

то есть справа от разрыва течение плазмы должно быть дозвуковым по отношению к быстрой магнитозвуковой волне.

2. Если $v_{\delta 1} > v_{x1} > v_{M1}$, то слева есть одна уходящая волна (быстрая) и, следовательно, справа их должно быть две. Поскольку, как мы уже говорили, две уходящие волны (медленная и быстрая, с волновым вектором $\mathbf{k}_x > 0$) существуют всегда, две другие волны (с $\mathbf{k}_x < 0$) должны быть приходящими. Это может иметь место, если $v_{x2} < v_{M2} < v_{\delta 2}$ — тогда обе волны с $\mathbf{k}_x < 0$ являются приходящими.

Две эти области отмечены на рисунке горизонтальной штриховкой. Пересечение обеих штриховок определяет две области эволюционности ударных волн. Они соответствуют быстрой и медленной ударным волнам (переходы 1-2 и 3-4) .

Отсюда, в частности, можно оценить параметры в переходной области за фронтом отошедшей ударной волны. Скорость солнечного ветра около орбиты Земли в несколько раз больше скорости быстрой магнитозвуковой волны. В этом случае, как видно из рисунка, течение плазмы в переходной области должно быть сверхальфвеновским, но дозвуковым по отношению к быстрой магнитозвуковой волне (переход 1-2).

Сделанные выше заключения справедливы при использовании модели идеальной МГД, однако в некоторых последних публикациях делается вывод об эволюционности промежуточных ударных волн (переходы 1-3, 1-4, 2-3 и 2-4) в случае использования модели диссипативной МГД (см. напр. C.C.Wu, C.F.Kennel, Structure and evolution of time-dependent intermediate shocks, Phys. Rev. Lett., v. 68, 56, 1992). Остается открытым вопрос о подтверждении этих теоретических результатов в данных спутниковых наблюдений.

Дополнительные вопросы: 1. На сколько разрывов в общем случае распадается произвольный разрыв (задача Римана о распаде произвольного разрыва)?