

3. ВОЛНЫ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПЛАЗМЕ

§ 12. Кинетическая теория волн в плазме без магнитного поля

Арцимович, Сагдеев § 1.12

Магнитогидродинамические волны, рассмотренные ранее, представляют собой группу низкочастотных электромагнитных ионных колебаний. Кроме них, в плазме могут распространяться колебания других типов, большинство из которых описывается с помощью кинетической теории. В этом параграфе мы рассмотрим **электростатические ионные волны**. Пусть распространение плоской монохроматической волны в плазме сопровождается появлением самосогласованного потенциала

$$\varphi = \varphi_0 \exp(-i(\omega t - kx)) \quad (1)$$

Функцию распределения частиц ищем в форме

$$f_{i,e} = f_{0i,e}(v) + f_{1i,e}(x, v, t), \quad (2)$$

где f_1 – это малая поправка к равновесному распределению f_0 , связанная с движением волны.

$$f_1 \sim e^{-i(\omega t - kx)}$$

Плазма в невозмущенном состоянии предполагается однородной и максвелловской: $\partial f_0 / \partial x = 0$. Подставляем (1) и (2) в уравнение Власова:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{q_{i,e} \nabla \varphi}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = 0;$$

и получаем в линейном приближении:

$$-i\omega f_1 + ikv f_1 - i \frac{q}{m} k \varphi \frac{\partial f_0}{\partial v} = 0 \quad (3)$$

Откуда:

$$f_{1i,e}(kv - \omega) = \frac{q_{i,e}}{m_{i,e}} k \varphi \frac{\partial f_{0i,e}}{\partial v},$$

или:

$$\begin{aligned} f_{1,i} &= -\frac{e}{m_i} k \varphi \frac{\partial f_{0i} / \partial v}{\omega - kv} \\ f_{1,e} &= \frac{e}{m_e} k \varphi \frac{\partial f_{0e} / \partial v}{\omega - kv} \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, возмущения ионной и электронной плотности равны:

$$\begin{aligned} \delta n_i &= \int f_{1i} dv = -\frac{e}{m_i} k \varphi \int \frac{\partial f_{0i} / \partial v}{\omega - kv} dv \\ \delta n_e &= \int f_{1e} dv = \frac{e}{m_e} k \varphi \int \frac{\partial f_{0e} / \partial v}{\omega - kv} dv \end{aligned} \quad (5)$$

Электрический потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -k^2\varphi = -4\pi\rho_e = -4\pi e(\delta n_i + \delta n_e), \quad (6)$$

или:

$$-k^2\varphi = +4\pi k\varphi e^2 \left\{ \frac{1}{m_i} \int \frac{\partial f_{0i}/\partial v}{\omega - kv} dv + \frac{1}{m_e} \int \frac{\partial f_{0e}/\partial v}{\omega - kv} dv \right\} \quad (7)$$

Откуда получаем:

$$k^2 + \frac{4\pi e^2 k}{m_i} \left\{ \int \frac{\partial f_{0i}/\partial v}{\omega - kv} dv + \frac{m_i}{m_e} \int \frac{\partial f_{0e}/\partial v}{\omega - kv} dv \right\} = 0 \quad (8)$$

Уравнение (8) содержит k и ω и является, по сути дела, дисперсионным уравнением для продольных “электростатических” волн в бесстолкновительной плазме.

Рассмотрим его подробнее. Для этого оценим каждый из членов, входящих в фигурные скобки в (8).

Исследуя звуковые волны, мы примем во внимание, что фазовая скорость рассматриваемых волн много больше тепловой скорости ионов и в то же время много меньше тепловой скорости электронов, что возможно лишь в случае неизотермической плазмы: $T_e \gg T_i$. Тогда в члене, определяемом электронами, $\omega \ll kv$, и мы имеем:

$$\frac{m_i}{m_e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_{0e}/\partial v}{\omega - kv} dv = -\frac{m_i}{km_e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_{0e}/\partial v}{v} dv$$

$$f_{0e} = n_0 \left(\frac{m_e}{2\pi T_e} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2T_e}\right), \text{ и } \frac{\partial f_0}{\partial v} = -n_0 \left(\frac{m_e}{2\pi T_e} \right)^{1/2} \cdot \frac{mv}{T_e} e^{-\frac{mv^2}{2T_e}}$$

Здесь T_e – энергетическая температура, включающая в себя постоянную Больцмана. Т.о. получаем:

$$\frac{m_i}{m_e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_{0e}/\partial v}{\omega - kv} dv = n_0 \frac{m_i}{km_e} \left(\frac{m_e}{2\pi T_e} \right)^{1/2} \frac{m_e}{T_e} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2T_e}} \cdot \frac{v}{v} dv =$$

Опять вспомним табличный интеграл $\int_0^{\infty} e^{-r^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r}$, и следовательно:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m}{2T} v^2} dv = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot \sqrt{\frac{m_e}{2T_e}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{m_e/2T_e}}$$

Отсюда:

$$\frac{m_i}{m_e} \int \frac{\partial f_{0e}/\partial v}{\omega - kv} dv = n_0 \frac{m_i}{km_e} \left(\frac{m_e}{2\pi T_e} \right)^{1/2} \frac{m_e}{T_e} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{m_e/2T_e}} = \frac{n_0 m_i}{k T_e}$$

Что касается ионного члена, то там следовало бы пренебречь величиной kv по сравнению с ω :

$$\int \frac{\partial f_{0i}/\partial v}{\omega - kv} dv = \int \frac{\partial f_{0i}/\partial v}{\omega} dv = -\frac{1}{\omega} \cdot n_0 \left(\frac{m_i}{2\pi T_i} \right)^{1/2} \frac{m_i}{T_i} \int_{-\infty}^{\infty} v e^{-\frac{mv^2}{2T_i}} dv = 0$$

Поэтому разложим знаменатель в ряд и ограничимся первыми двумя членами:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega - kv} &= \frac{1}{\omega(1 - \frac{kv}{\omega})} = \frac{1}{\omega} \left(1 - \frac{kv}{\omega}\right)^{-1} = \frac{1}{\omega} \left(1 + \frac{kv}{\omega}\right) \\ &\frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_{0i}}{\partial v} \left(1 + \frac{kv}{\omega}\right) dv = +\frac{1}{\omega^2} \dots \int v^2 \\ &= -n_0 \left(\frac{m_i}{2\pi T_i}\right)^{1/2} \frac{m_i}{T_i} \frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} v e^{-\frac{mv^2}{2T}} dv - n_0 \left(\frac{m_i}{2\pi T_i}\right)^{1/2} \frac{m_i}{T_i} \frac{k}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2T}} dv \end{aligned}$$

Используем табличный интеграл

$$\int_0^{-\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2T}} dv = \frac{2T}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{2T} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2T}} \sqrt{\frac{2T}{m}} \sqrt{\frac{m}{2T}} dv = 2 \cdot \frac{2T}{m} \cdot \sqrt{\frac{2T}{m}} \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \sqrt{\frac{2\pi T}{m}} \cdot \frac{T}{m}$$

В итоге, получим:

$$-n_0 \left(\frac{m_i}{2\pi T_i}\right)^{1/2} \frac{m_i}{T_i} \frac{k}{\omega^2} \frac{T_i}{m_i} \sqrt{\frac{2\pi T_i}{m_i}} = -\frac{kn_0}{\omega^2}$$

Подставляя полученные выражения в дисперсионное уравнение (8), находим:

$$k^2 + \frac{4\pi e^2 k}{m_i} \left\{ -\frac{kn_0}{\omega^2} + \frac{n_0 m_i}{k T_e} \right\} = 0. \quad (9)$$

Вспомнив определение плазменной частоты $\Pi_i = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m_i}$, получим:

$$k^2 = \Pi_i^2 \left\{ \frac{k^2}{\omega^2} - \frac{m_i}{T_e} \right\}, \text{ или } (\omega^2 - \Pi_i^2) = -\frac{\omega^2}{k^2} \frac{m_i}{T_e} \quad (10)$$

а) В случае длинных волн $k \rightarrow 0$, и

$$\frac{k^2}{\omega^2} - \frac{m_i}{T_e} = 0; \quad \boxed{\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{T_e}{m_i}} \text{ — ионный звук}$$

б) В случае коротких волн ($k \rightarrow \infty$)

$$\omega^2 = \Pi_i^2 \text{ — колебания на ионной плазменной частоте}$$

Попробуем рассмотреть высокочастотную ветвь: $\omega \gg kv$ не только для ионов, но и для электронов. Тогда дисперсионное соотношение (8) сводится к (сравн. с (10)):

$$\begin{aligned} k^2 &= \Pi_i^2 \left(\frac{k^2}{\omega^2} + \frac{m_i}{m_e} \frac{k^2}{\omega^2} \right) \\ \omega^2 k^2 - \Pi_i^2 k^2 - \frac{m_i}{m_e} \Pi_i^2 k^2 &= 0 \\ \omega^2 &= \Pi_i^2 + \frac{m_i}{m_e} \Pi_i^2 = \Pi_i^2 + \Pi_e^2 \end{aligned}$$

Дополнительные вопросы: 1. Оцените величину ионной плазменной частоты в солнечном ветре.

НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ПЛАЗМЕ

Если частицы плазмы имеют максвелловское распределение по скоростям, а плотность и магнитное поле однородны, то такая плазма находится в состоянии полного термодинамического равновесия. В этом состоянии энтропия системы максимальна, и в ней нет источника свободной энергии, который мог бы возбуждать волны. Однако реальная космическая плазма очень редко является термодинамически равновесной, хотя при этом она может находиться в равновесии в том смысле, что все действующие на нее силы компенсируют друг друга. Свободная энергия, имеющаяся в системе, может привести к самовозбуждению волн; при этом равновесие плазмы является неустойчивым. Неустойчивость всегда представляет собой такое движение, которое уменьшает свободную энергию плазмы и переводит ее в состояние, более близкое к термодинамическому равновесию.

Неустойчивости можно условно разделить на несколько классов. Существуют "магнито-гидродинамические" неустойчивости, обычно связанные с особенностями пространственной геометрии системы. Они развиваются, например, когда в системе существует резкая граница между плазмой с разными свойствами. К этому классу, в частности, относятся: неустойчивости Кельвина-Гельмгольца и Рэля-Тейлора, желобковая неустойчивость. Это — макронеустойчивости, поскольку их характерный пространственный размер сравним с размером всего плазменного объема (МГД масштабы).

В класс "кинетических" или "микронеустойчивостей" входят неустойчивости, связанные с тем, что функция распределения частиц по скоростям отличается от максвелловской. В частности, существует большая группа пучковых неустойчивостей, развивающихся при условии, когда на фоновое (например, максвелловское) распределение накладывается пучок быстрых частиц того же сорта. Некоторые неустойчивости могут развиваться в случае существования относительной скорости движения электронов по отношению к ионам (т.е. электрического тока). Кинетические неустойчивости обычно исследуют, используя уравнение Больцмана-Власова.

Некоторые неустойчивости, развивающиеся на макромасштабах, требуют, строго говоря, кинетического рассмотрения. Одним из примеров является зеркальная неустойчивость, вызванная анизотропией температур ионов во внешнем магнитном поле, т.е. при $T_{\perp} \neq T_{\parallel}$.

§ 13. Неустойчивость Рэля-Тейлора или перестановочная неустойчивость.

Кролл, Трайвелпис, стр. 200–202

Неустойчивость Рэля-Тейлора возникает в гидродинамике при условии, когда в поле силы тяжести тяжелая жидкость находится над легкой. Очевидно, что такое состояние неустойчиво. Аналогичная неустойчивость существует и в магнитной гидродинамике.

Рассмотрим следующую конфигурацию в приближении изотропной МГД. Пусть плазма находится в магнитном поле, направленном по оси z : $\mathbf{B} = B(y)\mathbf{e}_z$, и гравитационном

поле, направленном по оси y : $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_y$. Будем считать, что все величины не зависят от z . Ищем решение в виде:

$$\mathbf{v}_1(x, y, t) = (v_{1x}\mathbf{e}_x + v_{1y}\mathbf{e}_y)e^{-\omega t}.$$

Используем уравнения изотропной МГД для плазмы в однородном гравитационном поле.

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \frac{1}{4\pi}\text{rot}\mathbf{B} \times \mathbf{B} + \rho\mathbf{g} \quad (1)$$

$$\text{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}; \quad (2)$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad (3)$$

$$E_{\perp} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

$$E_{\parallel} = +\frac{1}{ne}(\rho\mathbf{g} + \nabla p_i)_{\parallel} \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\right)\frac{P}{\rho^\gamma} = 0$$

Уравнения (4) и (5) следуют из обобщенного закона Ома. В равновесном состоянии, когда суммарная сила равна нулю, имеем:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla p_0 - \mathbf{g}\rho_0 - \frac{1}{c}\mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_0 = 0 \\ \text{rot}\mathbf{B}_0 = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_0 \end{array} \right\} \nabla\left(P_0 + \frac{B_0^2}{8\pi}\right) = \mathbf{g}\rho_0 \quad (6)$$

или:

$$\nabla p_0 = \frac{\text{rot}B_0 \times B_0}{4\pi} + \mathbf{g}\rho_0 \quad (6a)$$

Рассмотрим малые отклонения от равновесного состояния:

$$p = p_0 + p_1; \quad p_1 \ll p_0; \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1; \quad \rho = \rho_0 + \rho_1; \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_1; \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$$

Подставим эти значения в (1)

$$(\rho_0 + \rho_1)\left[\frac{\partial(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1)}{\partial t} + ((\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1)\nabla)(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1)\right] = -\nabla(p_0 + p_1) + \frac{1}{4\pi}\text{rot}(\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1) + (\rho_0 + \rho_1)\mathbf{g};$$

Величины с индексом 0 не зависят от времени, примем $\mathbf{v}_0 \equiv 0$.

$$\begin{aligned} (\rho_0 + \rho_1)\frac{\partial\mathbf{v}_1}{\partial t} + (\rho_0 + \rho_1)(\mathbf{v}_1\nabla)\mathbf{v}_1 &= -\nabla p_0 - \nabla p_1 + \frac{1}{4\pi}\text{rot}\mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_0 + \frac{1}{4\pi}\text{rot}\mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_1 + \\ &+ \frac{1}{4\pi}\text{rot}\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_0 + \frac{1}{4\pi}\text{rot}\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1 + \rho_0\mathbf{g} + \rho_1\mathbf{g}; \end{aligned}$$

Учитывая (6a) и отбрасывая величины 2-ого порядка малости, получим:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{1}{4\pi} \text{rot } \mathbf{B}_0 \times \mathbf{B}_1 + \frac{1}{4\pi} \text{rot } \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_0 + \rho_1 \mathbf{g} \quad (7)$$

Уравнение неразрывности в линейном приближении имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0; \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v}_1 + \rho_1 \text{div } \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \nabla) \rho_0 + (\mathbf{v}_1 \nabla) \rho_1 &= 0. \end{aligned}$$

Отбросим малые члены:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \nabla) \rho_0 = 0 \implies \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \text{div}(\rho_0 \mathbf{v}_1) = 0 \quad (8)$$

Уравнение состояния:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{P}{\rho^\gamma} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P_0 + P_1}{(\rho_0 + \rho_1)^\gamma} \right) + (\mathbf{v}_1 \nabla) \left(\frac{P_0 + P_1}{(\rho_0 + \rho_1)^\gamma} \right) &= 0 \\ \frac{1}{\rho_0^\gamma} \frac{\partial P_1}{\partial t} - \frac{\gamma P_0}{\rho_0^{\gamma+1}} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0^\gamma} (\mathbf{v}_1 \nabla) P_0 - \gamma \frac{P_0}{\rho_0^{\gamma+1}} (\mathbf{v}_1 \nabla) \rho_0 &= 0 \end{aligned}$$

Из этого следует:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1}{\partial t} &= \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \gamma \frac{P_0}{\rho_0} (\mathbf{v}_1 \nabla) \rho_0 - (\mathbf{v}_1 \nabla) P_0 = \\ &= \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_1 \nabla) \rho_0 \right) - (\mathbf{v}_1 \nabla) P_0 = -\gamma P_0 \text{div } \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_1 \nabla) P_0 \end{aligned} \quad (9a)$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -(\mathbf{v}_1 \nabla) p_0 - \gamma p_0 (\nabla \mathbf{v}_1) \quad (9)$$

Продифференцируем (7) еще раз по t :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t^2} = -\nabla(-\gamma p_0 \text{div } \mathbf{v}_1 - (\mathbf{v}_1 \nabla) p_0) + \frac{1}{4\pi} \text{rot } \mathbf{B}_0 \times \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \text{rot } \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \times \mathbf{B}_0 + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \mathbf{g} \quad (10)$$

Из уравнения в замороженности

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \implies \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0] = \mathbf{v}_1 \text{div } \mathbf{B}_0 - (\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{B}_0 + (\mathbf{B}_0 \nabla) \mathbf{v}_1 - \mathbf{B}_0 \text{div } \mathbf{v}_1 \quad (11)$$

$$\text{rot } \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = [\nabla \times [\nabla \times [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0]]]$$

Подставляя (9a) и (11) в уравнение (10), получаем:

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t^2} &= \nabla((\mathbf{v}_1 \nabla)P_0 + \gamma P_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_1) + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B}_0 \times \partial \mathbf{B}_1 / \partial t + \\ &+ \frac{1}{4\pi} [\nabla \times [\nabla \times [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0]] \times \mathbf{B}_0 + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \mathbf{g}\end{aligned}\quad (12)$$

Используем уравнения неразрывности (8) для замены $\frac{\partial \rho_1}{\partial t}$.

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t^2} &= \nabla((\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)P_0 + \gamma P_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_1) + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{B}_0 \times \operatorname{rot}[\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0] + \\ &+ \frac{1}{4\pi} [\nabla \times [\nabla \times [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0]] \times \mathbf{B}_0 - ((\mathbf{v}_1 \cdot \nabla)\rho_0 + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_1)\mathbf{g}\end{aligned}\quad (12a)$$

Спроектируем (12a) на оси координат:

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}((\mathbf{v} \nabla)P_0 + \gamma p_0 \operatorname{div} \mathbf{v}) + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{rot}_y \mathbf{B}_0 \cdot \operatorname{rot}_z [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] - \operatorname{rot}_z \mathbf{B}_0 \cdot \operatorname{rot}_y [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0]) \\ &+ \frac{1}{4\pi} ([\nabla \times [\nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0]]]_y B_{0z} - [\nabla \times [\nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0]]]_z B_{0y}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}((\mathbf{v} \nabla)P_0 + \gamma P_0 \operatorname{div} \mathbf{v}) + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial z} Q_x - \frac{\partial}{\partial x} Q_z \right) B_{0z} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x}((\mathbf{v} \nabla)P_0 + \gamma P_0 \operatorname{div} \mathbf{v}) - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} Q_z B_{0z}\end{aligned}$$

Мы ввели величину $\mathbf{Q} = [\nabla \times [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0]]$, соответственно имеем:

$$\begin{aligned}Q_x &= [\nabla \times [v \times B_0]]_x = \frac{\partial}{\partial y} [v \times B_0]_z - \frac{\partial}{\partial z} [v \times B_0]_y = 0 \\ Q_y &= [\nabla \times [v \times B_0]]_y = \frac{\partial}{\partial z} [v \times B_0]_x - \frac{\partial}{\partial x} [v \times B_0]_z = 0 \\ Q_z &= [\nabla \times [v \times B_0]]_z = \frac{\partial}{\partial x} [v \times B_0]_y - \frac{\partial}{\partial y} [v \times B_0]_x = \frac{\partial}{\partial x} (v_z B_{0x} - v_x B_{0z}) - \\ &- \frac{\partial}{\partial y} (v_y B_{0z} - v_z B_{0y}) = -\frac{\partial}{\partial x} (v_x B_{0z}) - \frac{\partial}{\partial y} (v_y B_{0z}) = \\ &= -v_x \frac{\partial B_{0z}}{\partial x} - B_{0z} \frac{\partial v_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} - B_{0z} \frac{\partial v_y}{\partial y} = -(v \nabla) B_{0z} - B_{0z} \operatorname{div}(\mathbf{v})\end{aligned}$$

В итоге, для x-компоненты получим:

$$\begin{aligned}-\rho_0 \omega^2 v_x &= \frac{\partial}{\partial x}((\mathbf{v} \nabla)P_0 + \gamma P_0 \operatorname{div} \mathbf{v}) - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} ((-\mathbf{v} \nabla) B_{0z} - B_{0z} \operatorname{div} \mathbf{v}) B_{0z} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(\gamma P_0 + \frac{B_{0z}^2}{8\pi}) \operatorname{div} \mathbf{v} \right] + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{v} \nabla) (P_0 + \frac{1}{8\pi} B_{0z}^2)\end{aligned}\quad (13)$$

Аналогичным образом можно получить:

$$-\omega^2 \rho_0 v_y = \frac{\partial}{\partial y} ((\mathbf{v} \nabla) P_0 + \gamma P_0 \operatorname{div} \mathbf{v}) - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} (Q_z) B_{0z} + [(\mathbf{v} \nabla) \rho_0 + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}] g. \quad (14)$$

С учетом уравнения равновесия (6)

$$\nabla(P_0 + \frac{B_0^2}{8\pi}) = -\rho_0 g$$

уравнения (13) и (14) принимают вид:

$$-\rho_0 \omega^2 v_x + (\rho_0 g) \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [(\gamma P_0 + \frac{B_0^2}{4\pi}) \operatorname{div} \mathbf{v}]; \quad (15)$$

$$-\rho_0 \omega^2 v_y + (\rho_0 g) \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [(\gamma P_0 + \frac{B_0^2}{4\pi}) \operatorname{div} \mathbf{v}] + (\rho_0 g) \operatorname{div} \mathbf{v}; \quad (16)$$

Продифференцируем (15) по y и (16) по x и вычтем одно из другого; в результате получим:

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 \omega^2 v_y) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 g \frac{\partial v_y}{\partial y}) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [(\gamma P_0 + \frac{B_0^2}{4\pi}) \operatorname{div} \mathbf{v}] + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 g \operatorname{div} \mathbf{v})$$

—

$$-\frac{\partial}{\partial y} (\rho_0 \omega^2 v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_0 g \frac{\partial v_y}{\partial x}) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [(\gamma P_0 + \frac{B_0^2}{4\pi}) \operatorname{div} \mathbf{v}]$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 \omega^2 v_y) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 g \frac{\partial v_y}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_0 \omega^2 v_x) - \frac{\partial}{\partial y} (\rho_0 g \frac{\partial v_y}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x} (\rho_0 g \operatorname{div} \mathbf{v})$$

Из этого следует

$$\begin{aligned} -\omega^2 \frac{\partial \rho_0}{\partial x} v_y - \omega^2 \rho_0 \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial \rho_0}{\partial x} g \frac{\partial v_y}{\partial y} + \rho_0 g \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \rho_0}{\partial y} \omega^2 v_x + \omega^2 \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial y} - \\ - \frac{\partial \rho_0}{\partial y} g \frac{\partial v_y}{\partial x} - \rho_0 g \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} = \rho_0 g \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{v}; \end{aligned}$$

В итоге, получим выражение

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} v_x - (1 + \frac{g}{\omega^2} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y}) \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{g}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (17)$$

Это уравнение в общем случае не решается, поскольку в него входят 2 неизвестных, v_x и v_y . Поэтому требуется задать какое-нибудь дополнительное условие. Обычно используется приближение

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (18)$$

Оно соответствует или предположению о несжимаемости плазмы, или рассмотрению только определенных типов возмущения (например, альфвеновских волн), когда $\operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0$ (но возможно $\frac{\partial \rho_0}{\partial y} \neq 0$).

Итак, пусть $\text{div } \mathbf{v}_1 = 0$. Решение (17) ищем в форме:

$$\mathbf{v}_1(x, y) = \tilde{\mathbf{v}}_1(y)e^{ikx}.$$

Тогда (18) сводится к:

$$ikv_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0; \quad v_x = -\frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot \frac{1}{ik} = \frac{i}{k} \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (19)$$

и, подставляя (19) в (17), получаем:

$$\frac{i}{k} \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{i}{k\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial y} - \left(1 + \frac{g}{\omega^2} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y}\right) ikv_y = 0; \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} \frac{\partial v_y}{\partial y} - k^2 \left(1 + \frac{g}{\omega^2} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y}\right) v_y = 0 \quad (20a)$$

Решение уравнения (20) можно получить в ряде частных случаев:

а) **Экспоненциальный профиль плотности плазмы:**

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} = \text{const},$$

тогда (20) сводится к

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + c_1 \frac{\partial v_y}{\partial y} - c_2 v_y = 0.$$

Чтобы получить ограниченное решение, предполагаем

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = 0,$$

тогда получим:

$$k^2 \left(1 + \frac{g}{\omega^2} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y}\right) = 0;$$

$$\omega^2 = -g \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial y} \quad (21)$$

Если $\frac{\partial \rho_0}{\partial y} > 0$, то есть плотность плазмы возрастает в направлении, противоположном силе тяжести, то $\omega^2 < 0$ и $\omega = i\text{Im}(\omega)$.

Тогда $v_1 \sim e^{-i\omega t} \sim e^{-i \cdot i \text{Im}(\omega) \cdot t} = e^{+\text{Im}(\omega) \cdot t}$, т.е. амплитуда волны растет со временем. \rightarrow Плазма неустойчива.

б) **Плазма с резкой границей**

Пусть при $y < 0$: $\rho_0 = 0$; а при $y > 0$: $\rho_0 = \text{const}$; причем $\partial \rho_0 / \partial t = 0$.

Уравнение (20а) при $y > 0$ принимает вид:

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} - k^2 v_y = 0, \quad (22)$$

$$\text{соответственно получим} \quad v_y = v_y^0 e^{-ky}. \quad (23)$$

Граничное условие при $y = 0$ дается выражением:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial y} = \rho_0 \delta(y), \quad (24)$$

и при $y = 0$ уравнение (20а) сводится к:

$$\delta(y) \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{k^2}{\omega^2} g v_y \delta(y) = 0. \quad (25)$$

Подставляя (23) в (25), получаем:

$$-k v_y - \frac{k^2}{\omega^2} g v_y = 0.$$

Отсюда

$$k = -\frac{\omega^2}{g},$$

или

$$\omega = \sqrt{kg} \cdot i$$

частота — мнимая величина, значит, плазма неустойчива.

Неустойчивость Рэля-Тейлора может, в частности, развиваться в ионосфере, ниже максимума ионизации в слое F. Условия для роста неустойчивости выполняются вблизи экватора, где магнитное поле направлено горизонтально.

§ 14. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КЕЛЬВИНА-ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца (НКГ) развивается на тангенциальном разрыве скорости. Ее физический смысл можно проиллюстрировать с помощью рисунка 5 (Мальцев, Лекции по магнитосферно-ионосферной физике, 1995). Существует граница между двумя средами. Предположим для простоты, что плотности в обеих средах одинаковы, скорости равны по модулю, но противоположны по направлению (V_1 и V_2), магнитное поле отсутствует. Для несжимаемых жидкостей выполняется закон Бернулли

$$p + \rho V^2/2 = \text{const}. \quad (26)$$

Горб на границе сжимает линии тока жидкости в верхней среде и разреживает их в нижней. Это означает, что выше горба скорость течения больше, чем ниже. Согласно (26), давление над горбом становится меньше, чем под горбом, что приводит к дальнейшему росту возмущения.

Простейшим примером НКГ является рябь, вызываемая ветром на поверхности воды. В космической плазме НКГ может развиваться, например, в виде поверхностных волн на флангах магнитопаузы.

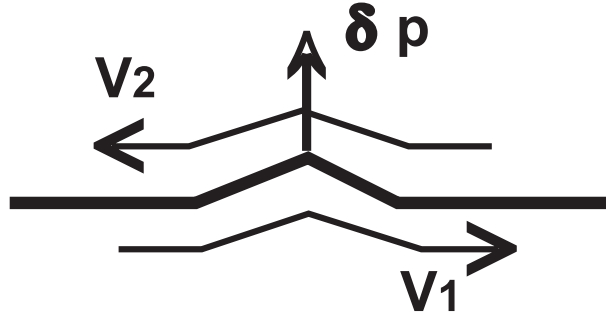


Рис. 5: Показано возникновение горба на границе двух сред. В несжимаемой жидкости такое возмущение должно нарастать.

НКГ является магнитогидродинамической неустойчивостью, ее возникновение связано с градиентами скорости потока, а длина волны существенно больше величины ионного гирорадиуса. Рассмотрим скачок скорости внутри слоя малой толщины Δ . В МГД приближении можно считать $\Delta \rightarrow 0$.

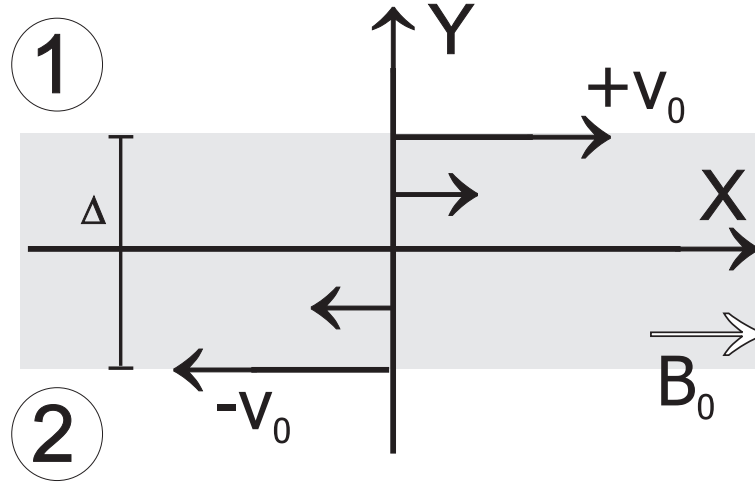


Рис. 6: В реальном случае существует пограничный слой толщиной Δ , размер которого больше величины ионного гирорадиуса, но меньше характерной длины волны.

Проанализируем условия развития НКГ, используя уравнения движения и магнитной индукции.

$$m_p n \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (27)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (28)$$

Также как в § 13 будем брать малые возмущения относительно положения равновесия: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta \mathbf{B}$, $p = p_0 + \delta p$. Пусть точка в окрестности пограничного слоя смещается на $\delta \mathbf{X}$, тогда возмущение скорости в этой точке выражается как $\delta \mathbf{v} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{X}$. Подставим равновесные и возмущенные значения в (27) и (28) и возьмем члены первого порядка малости (в нулевом порядке получается баланс невозмущенных давлений, магнитного и теплового, аналогично (6)).

$$m_p n_0 \frac{d^2}{dt^2} \delta \mathbf{X} = -\nabla \delta p - \frac{1}{4\pi} [\delta \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}_0) + \mathbf{B}_0 \times (\nabla \times \delta \mathbf{B})] \quad (29)$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\frac{d\delta \mathbf{X}}{dt} \times \mathbf{B}_0 \right) = \frac{d}{dt} [\nabla \times (\delta \mathbf{X} \times \mathbf{B}_0)] \quad (30)$$

В первом порядке точности

$$\frac{\partial \delta \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{d\delta \mathbf{B}}{dt}.$$

Поэтому (30) можно проинтегрировать по времени:

$$\delta \mathbf{B} = \nabla \times (\delta \mathbf{X} \times \mathbf{B}_0) = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \delta \mathbf{X} - (\delta \mathbf{X} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 + \delta \mathbf{X} (\nabla \cdot \mathbf{B}_0) - \mathbf{B}_0 (\nabla \cdot \delta \mathbf{X}) \quad (31)$$

Мы расписали ротор векторного произведения по формуле из Справочника по математике (Г. Корн и Т. Корн). Можно заметить, что в (31) член $\delta \mathbf{X} (\nabla \cdot \mathbf{B}_0) = 0$.

Введем полное давление, выражающееся как сумма теплового и магнитного давлений: $p_{tot} = p + B^2/(8\pi)$. Тогда вариация полного давления имеет вид:

$$\delta p_{tot} = \delta p + \frac{1}{8\pi} \delta (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = \delta p + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B}_0 \cdot \delta \mathbf{B} \quad (32)$$

Подставим δp из (32) в (29):

$$m_p n_0 \frac{d^2}{dt^2} \delta \mathbf{X} = -\nabla \delta p_{tot} + \frac{1}{4\pi} \nabla (\mathbf{B}_0 \cdot \delta \mathbf{B}) - \frac{1}{4\pi} [\delta \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}_0) + \mathbf{B}_0 \times (\nabla \times \delta \mathbf{B})].$$

Можно расписать $\nabla (\mathbf{B}_0 \cdot \delta \mathbf{B}) = (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \delta \mathbf{B} + (\delta \mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_0 \times (\nabla \times \delta \mathbf{B}) + \delta \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}_0)$. Т.о. имеем:

$$m_p n_0 \frac{d^2}{dt^2} \delta \mathbf{X} = -\nabla \delta p_{tot} + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \delta \mathbf{B} + \frac{1}{4\pi} (\delta \mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0. \quad (33)$$

Подставим $\delta \mathbf{B}$ из (31) во второй член справа, тогда:

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \delta \mathbf{B} &= (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \{ (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \delta \mathbf{X} - (\delta \mathbf{X} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_0 (\nabla \cdot \delta \mathbf{X}) \} = \\ &= (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla)^2 \delta \mathbf{X} - (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \{ (\delta \mathbf{X} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_0 (\nabla \cdot \delta \mathbf{X}) \}. \end{aligned}$$

В итоге, из (33) получим:

$$m_p n_0 \left(\frac{d^2}{dt^2} - (\mathbf{V}_A \cdot \nabla)^2 \right) \delta \mathbf{X} = -\nabla \delta p_{tot} + \mathbf{a}, \quad (34)$$

где использованы следующие обозначения

$$\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi} (\delta \mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 - \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \{ (\delta \mathbf{X} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_0 (\nabla \cdot \delta \mathbf{X}) \},$$

а альвеновская скорость записывается как и раньше $\mathbf{V}_A = \mathbf{B}_0 / \sqrt{(4\pi m_p n_0)}$.

Уравнение (34) показывает, что альвеновскую волну, распространяющуюся вдоль границы, можно связать с изменениями полного давления. Чтобы сделать следующий шаг, предположим, что плазменные параметры и магнитное поле постоянны и однородны по обе стороны от границы. Только в самом пограничном слое имеет место скачок p_{tot} . Можно, в

частности, считать, что возмущение является несжимаемым ($\nabla \cdot \delta \mathbf{v} = 0$), а скачок давления возникает за счет изменения скорости потока с одной из сторон (как это описано в начале параграфа). Тогда, в дальнейшем, можно положить $\mathbf{a} = 0$.

Рассмотрим плоскую волну, бегущую вдоль границы двух сред. Она имеет волновой вектор в плоскости (x, z) , т.е. $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_z \mathbf{e}_y$.

$$\delta \mathbf{X} \sim \exp[-i(\omega t - k_x x - k_z z)]$$

Подставив это в (34), получаем уравнение смещения границы в виде:

$$\delta \mathbf{X} = \frac{\nabla \delta p_{tot}}{m_p n_0 [\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_A)^2]}. \quad (35)$$

Если граница – это бесконечно тонкий разрыв, то должно выполняться условие непрерывности смещений с верхней и нижней стороны от разрыва (т.е. в области 1 и 2 на рис. 6). Для простоты предполагаем, что в области 2 плазма покоится, а в области 1 движется (в отсутствии возмущений) с постоянной скоростью $+\mathbf{V}_0$. Тогда в (35) надо учесть доплеровский сдвиг частоты и использовать $\omega_1 = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_A$. Учитывая непрерывность δp_{tot} при переходе через границу, получаем дисперсионное отношение для НКГ:

$$\frac{1}{n_{02}[\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{A2})^2]} + \frac{1}{n_{01}[(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_0)^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{A1})^2]} = 0 \quad (36)$$

В уравнении (36) первый член описывает распространение альвеновской волны в области 2 (где скорость потока $V = 0$), а второй член описывает распространение альвеновской волны в области 1 с движущимся потоком. Тонкая граница связывает между собой эти две альвеновские моды. Или, другими словами, возле границы раздела двух сред с градиентом скорости могут возбуждаться альвеновские волны за счет развития НКГ.

Уравнение (36) является квадратичным относительно ω .

$$n_{01}[(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_0)^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{A1})^2] + n_{02}[\omega^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{A2})^2] = 0$$

$$\omega^2(n_{01} + n_{02}) - \omega 2n_{01}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_0) + \{n_{01}[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_0)^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{A1})^2] - n_{02}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{A2})^2\} = 0$$

Можно получить, при каких условиях у ω появляются комплексные корни:

$$n_{01}^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_0)^2 - (n_{01} + n_{02})\{n_{01}[(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_0)^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{A1})^2] - n_{02}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{A2})^2\} < 0.$$

Отсюда следует условие

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_0)^2 > \frac{(n_{01} + n_{02})}{(n_{01}n_{02})} (n_{01}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{A1})^2 + n_{02}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{A2})^2). \quad (37)$$

или

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_0)^2 > \frac{(n_{01} + n_{02})}{4\pi m_p n_{01} n_{02}} ((\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_{01})^2 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_{02})^2). \quad (37a)$$

Неравенство (37) показывает, что НКГ будет развиваться при превышении скоростью \mathbf{V}_0 определенной пороговой величины. Причем, величина порога увеличивается с ростом фонового магнитного поля, т.е. магнитное поле стабилизирует неустойчивость.

Можно рассмотреть случай, когда в одной области большое магнитное поле и малая плотность (магнитосфера), а в другой области малое поле и большая плотность (переходный слой). Т.е. $n_{01} > n_{02}$ и $B_{01} < B_{02}$. Тогда условие (37) упростится:

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_0)^2 > \frac{n_{01}}{4\pi m_p n_{01} n_{02}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_{02})^2 = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_{A2})^2. \quad (38)$$

Таким образом, если вектора \mathbf{k} , \mathbf{B}_{02} , \mathbf{V}_0 одинаково направлены, условие развития неустойчивости состоит в том, чтобы скачок скорости через границу превосходил величину альвеновской скорости. Если же магнитное поле направлено перпендикулярно течению, то оно не оказывает стабилизирующего воздействия на развитие неустойчивости.

В другом предельном случае, при $n_{01} = n_{02} = n_0$ и $\mathbf{B}_{01} = \mathbf{B}_{02} = \mathbf{B}_0$, получаем

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_0)^2 > \frac{4}{4\pi m_p n_{01}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0)^2 = (\mathbf{k} \cdot 2\mathbf{V}_A)^2 \quad (38a).$$

Т.е. скачок скорости должен быть в 2 раза больше альвеновской скорости.

Аналогичным образом взяв за основу уравнения движения и магнитной индукции, Мальцев (1995) получил, что на границе магнитосферы с солнечным ветром должны нарастать волны с

$$\omega > \frac{V_A^2}{R_1 V_0}, \quad (39)$$

где V_A - Альвеновская скорость в магнитосфере, R_1 - радиус кривизны границы, а V_0 - скорость в переходном слое. Подставив характерные значения получим, что нарастают волны с периодом $T < 4$ минут.

Условия для развития НКГ могут также существовать в верхней авроральной ионосфере, на краях дискретных авроральных дуг.

Дополнительные вопросы:

1. В какой именно области магнитопаузы наиболее вероятен рост НКГ?
2. Какие пульсации в магнитосфере, как предполагают, являются следствием развития НКГ?

§ 15. ЗЕРКАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Развитие зеркальной неустойчивости (ЗН) связано с температурной анизотропией ионов в присутствии магнитного поля. Хотя существование ЗН можно проиллюстрировать, анализируя макроскопические уравнения, но точное описание позволяет дать только кинетический подход (поскольку требуется учитывать движение отдельных частиц вдоль и поперек магнитного поля).

Было показано (Hasegawa, 1969), что для плазмы с би-максвелловской функцией распределения на предельно низких частотах δp_\perp меняется в антифазе с δB (при $T_\perp > T_\parallel$):

$$\delta p_\perp = 2p_\perp \left(1 - \frac{T_\perp}{T_\parallel}\right) \frac{\delta B}{B}. \quad (40)$$

Таким образом, возможна ситуация, когда баланс давления будет нарушаться. Предположим, что в плазме возникла малая вариация магнитного поля $\delta B > 0$. Эта неустойчивость будет расти при:

$$\delta p_{\perp} + \frac{B\delta B}{4\pi} < 0. \quad (41)$$

Т.е. локальное увеличение густоты силовых линий будет увеличиваться.

Комбинируя (40) и (41) получим:

$$p_{\perp} \left(1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}\right) + \frac{B^2}{8\pi} < 0$$

или

$$1 + \beta_{\perp} \left(1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}\right) < 0. \quad (42)$$

То же самое можно записать как:

$$\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} > 1 + \frac{1}{\beta_{\perp}}. \quad (43)$$

Это - классическое условие для порога зеркальной неустойчивости. Когда анизотропия протонов $\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}$ выше порогового значения, неустойчивость развивается.

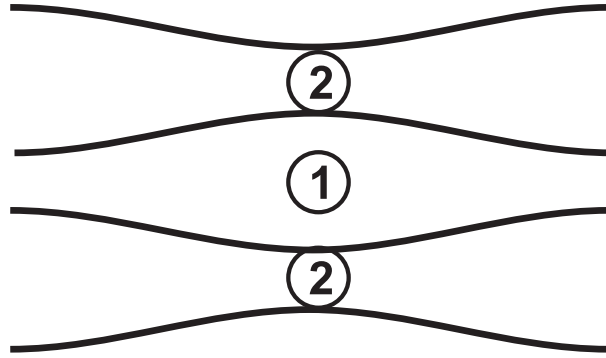


Рис. 7: Картина попеременного сближения и расхождения силовых линий магнитного поля, возникающая при развитии зеркальной неустойчивости. В области 1 напряженность поля меньше, но тепловое давление больше, поэтому полное давление тоже больше, чем в области 2.

Устанавливается картина попеременного сближения и расхождения силовых линий магнитного поля, показанная на рисунке. Частицы скапливаются в областях наименьшего поля (плотность в антифазе с магнитным полем), и за счет (41) увеличение полного давления приводит к еще большему расталкиванию силовых линий. Можно провести аналогию с магнитным зеркалом: частицы отражаются в точках с увеличенным полем и, таким образом, оказываются запертыми в областях минимума поля (но это не согласуется с сохранением магнитного момента, т.к. рассматриваем не одиночные частицы, а ансамбль частиц).

С помощью упрощенного г/д подхода можно найти инкремент роста неустойчивости (Southwood and Kivelson, 1993). Пусть $\delta \mathbf{x}$ - смещение частиц (силовых линий) относительно начального положения. Будем считать, что $\delta \mathbf{x}$ перпендикулярно \mathbf{B} , а $\delta B \simeq \delta B_{\parallel}$. Предположим, что возмущение можно описать функцией $\exp(\gamma t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$. Волновой вектор k имеет

2 компоненты k_{\perp} и k_{\parallel} . Из уравнения движения для компоненты перпендикулярно полю (сравн. с (29)) следует:

$$\rho\gamma^2\delta x = -ik_{\perp}(\delta p_{\perp} + B\delta B/4\pi). \quad (44)$$

Из уравнения магнитной индукции находится связь δB и δx (сравн. с (31)):

$$\delta B = \frac{\mathbf{B}}{B} \cdot (i\mathbf{k} \times (\delta\mathbf{x} \times \mathbf{B})) = -i(\mathbf{k} \cdot \delta\mathbf{x})B = -ik_{\perp}\delta x B. \quad (45)$$

Подставим δx из (45) и δp_{\perp} из (40) в (44) и получим

$$\rho\gamma^2\frac{\delta B}{B} = -k_{\perp}^2 2p_{\perp} \left(1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}\right) \frac{\delta B}{B} - k_{\perp}^2 \frac{B\delta B}{4\pi}. \quad (46)$$

Соответственно:

$$\gamma^2 = -k_{\perp}^2 V_A^2 \left[1 + \beta_{\perp} \left(1 - \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}}\right)\right], \quad (47)$$

где $V_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$. В (47) $\gamma > 0$ при выполнении условия (43).

Источником энергии для ЗН является температурная анизотропия протонов (в общем случае, ионов). Поэтому развитие неустойчивости приводит к ограничению температурной анизотропии (величина анизотропии не может существенно превосходить порог неустойчивости). Фазовая скорость ЗН равна нулю, т.е. неустойчивость дрейфует вместе с плазмой.

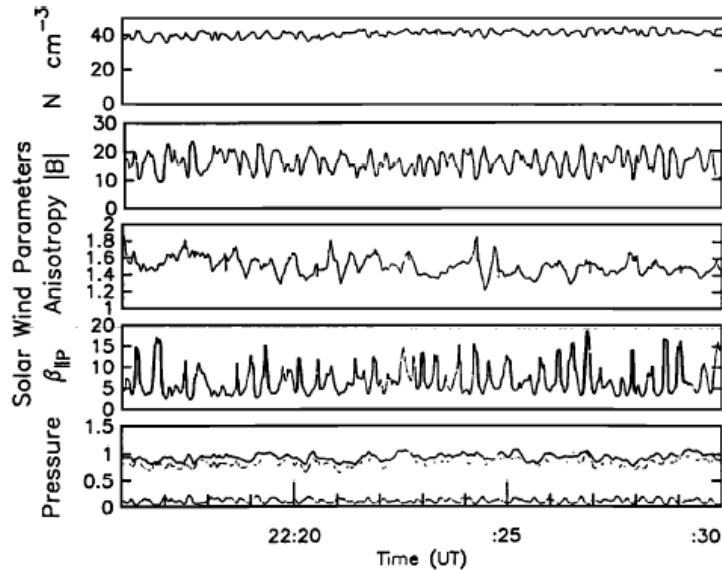


Figure 4. (top to bottom). The electron density, the modulus of the average magnetic field, the proton temperature anisotropy T_{\perp}/T_{\parallel} , $\beta_{p\parallel}$, and the pressure for the period 2216 UT to 2230 UT. This interval is typical of the M region (pure mirror modes).

Рис. 8: Пример развития ЗН в переходном слое между магнитопаузой и отошедшей ударной волной из работы Hubert et al. (1998).

Выводы, сделанные на основе кинетического описания, отличаются от выводов г/д описания.

1. Существуют популяции захваченных частиц (запертых магнитными зеркалами) и свободных частиц (которые имеют достаточно большую V_{\parallel}).
2. Гари (напр. Gary et al., 1997) с помощью численного решения линейного дисперсионного

уравнения Власова получил условие для порога ЗН, которое в общем виде записывается как

$$\frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} = 1 + \frac{S}{\beta_{\parallel}^{\alpha}}.$$

Параметры S и α могут меняться в зависимости от параметров среды, но обычно ограничены в пределах: $0.4 \leq \alpha \leq 0.5$ и $0.8 \leq S \leq 1$.

Другая неустойчивость, возникающая при условии $T_{\perp} > T_{\parallel}$, это протонно-циклотронная неустойчивость (ПЦН). ЗН и ПЦН могут "конкурировать" друг с другом. ЗН развивается обычно в плазме с большими β . Кроме этого, существуют другие неустойчивости, связанные с температурной анизотропией ионов. Например, шланговая неустойчивость развивается при $p_{\parallel} > p_{\perp} + B^2/4\pi$.

Спутниковые наблюдения подтверждают развитие ЗН в разных областях: в переходном слое Земли и других планет, а также иногда в сверхзвуковом солнечном ветре.

4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН И ЧАСТИЦ

Как известно, в атмосферу выпадают частицы, попадающие в конус потерь, т.е. имеющие достаточно большую продольную компоненту скорости. Увеличить продольную компоненту можно либо путем ускорения продольным электрическим полем, либо при сохранении полной энергии частиц соответствующим образом изменив направление ее движения. Первый из названных выше процессов имеет, по-видимому, место во время аврорального брейккапа, когда наблюдается значительное изменение энергетического спектра вторгающихся частиц. Однако в большинстве случаев энергетические спектры частиц, находящихся вблизи экваториальной плоскости магнитосферы, и частиц, выпадающих в полярную ионосферу, в целом совпадают. Это обстоятельство свидетельствует о том, что изменение питч-углов авроральных частиц, ответственных за диффузные полярные сияния, происходит без заметного изменения их энергии, то есть происходит процесс, аналогичный рассеянию частиц.

Обычно рассеяние частиц происходит в результате их столкновений друг с другом или с молекулами нейтрального газа. Однако в магнитосфере на расстояниях, соответствующих зоне полярных сияний, частота столкновений частиц настолько мала, что обусловленное ими рассеяние по питч-углам не может быть достаточно эффективным, и основным процессом, приводящим к изменению питч-углового распределения частиц, является их взаимодействие с распространяющимися в плазме волнами. В данном разделе мы рассмотрим подробнее механизм взаимодействия частиц с полем волны. В качестве примера рассмотрим поведение частицы в поле электростатической ленгмюровской волны, в поле ионно-звуковой волны и волны типа вистлера. Будут записаны условия, при которых данные волны усиливаются и ослабляются.

§ 16. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЧАСТИЦ С ПОЛЕМ ЛЕНГМЮРОВСКОЙ ВОЛНЫ.

Пусть плоская электростатическая волна с частотой ω и скоростью $u_\phi = \omega/k$ распространяется вдоль оси X . Рассмотрим частицу, движущуюся также вдоль оси X со скоростью v_0 , близкой к u_ϕ . В этом случае частица в течение относительно длительного промежутка времени находится в поле одного знака и может заметно изменить свою энергию. Величина этого изменения может быть оценена из следующих соображений.

Если кинетическая энергия частицы (в системе отсчета, движущейся вместе с волной) меньше высоты потенциального барьера, образуемого полем, то есть если $\frac{m(v')^2}{2} < \frac{eE_0}{2k}$, где $v' = v_0 - u_\phi$, то частица отражается от барьера и захватывается волной так, что ее скорость в системе отсчета, движущейся с волной, становится равной $-v'$ и, соответственно, в неподвижной системе отсчета скорости до и после взаимодействия имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= u_\phi + v' \\ v_2 &= u_\phi - v' \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При этом энергия частицы меняется на величину:

$$\begin{aligned} \Delta w &= \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = [(u_\phi - v')^2 - (u_\phi + v')^2] \frac{m}{2} = \\ &= -2m u_\phi v' = 2m \frac{\omega}{k} \left(\frac{\omega}{k} - v_1 \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Отсюда видно, что если первоначальная скорость частицы $v_1 > u_\phi$, то частица тормозится волной (в рассмотренном единичном акте отражения) и теряет часть своей энергии; если же $v_1 < u_\phi$, то частица ускоряется полем волны, получая дополнительную энергию.

Реальная плазма состоит из частиц, обладающих разными скоростями. Таким образом, результат взаимодействия волны с плазмой в целом определяется тем, каких частиц: быстрых ($v_1 > u_\phi$) или медленных ($v_1 < u_\phi$) больше в резонансном интервале скоростей

$$v_1 = \frac{\omega}{k} \pm \Delta v,$$

где

$$\Delta v = \left(\frac{e}{m} \frac{E_0}{k} \right)^{1/2}.$$

Очевидно, что в случае, например, максвелловского распределения частиц по скоростям медленных частиц больше; поэтому суммарная энергия, приобретаемая всеми резонансными частицами, будет положительной и, следовательно, волна будет затухать.

Таким образом, условием затухания волны в плазме является такая форма функции распределения частиц по скоростям, что при $v = \omega/k$ первая производная функции распределения отрицательна:

$$(\partial f(v_0)/\partial v_0)_{v_0=\frac{\omega}{k}} < 0 \quad (3)$$

Если же возле $v_0 = \omega/k$ выполняется условие $\partial f/\partial v_0 > 0$ (рис. 9б), то в резонансном интервале скоростей быстрых частиц оказывается больше, чем медленных, и резонансные частицы, в целом, будут тормозиться, отдавая свою энергию волне, которая, соответственно, будет усиливаться.

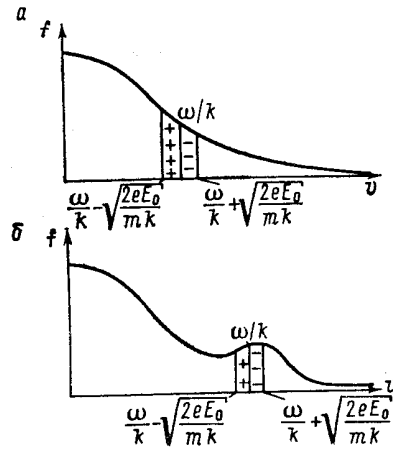


Рис. 9: К расчету взаимодействия ленгмюровской волны с плазмой.

Чтобы оценить скорость затухания (или, наоборот, нарастания) волны, приведенных выше качественных соображений недостаточно, поэтому рассмотрим описанную выше задачу более детально. Скорость, с которой плазма поглощает (или выделяет) энергию проходящей через нее электростатической волны, можно оценить как работу, совершаемую в единицу времени полем волны над движущимися в этом поле зарядами:

$$Q = \langle (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) \rangle = \langle (\hat{\sigma} E^2) \rangle. \quad (4)$$

Таким образом, для определения скорости затухания или нарастания волны прежде всего необходимо найти проводимость плазмы для данной функции распределения частиц по скоростям в поле волны с заданной частотой ω .

Но сначала рассмотрим более простой случай холодной плазмы в переменном электрическом поле при $k \rightarrow 0$. Рассмотрим плазму, состоящую из холодных электронов и ионов, помещенную в электрическое поле, направленное вдоль оси X и меняющееся со временем как:

$$E = E_0 \cos(\omega t).$$

Пренебрегая движением относительно тяжелых ионов (что справедливо при достаточно большой ω), запишем уравнение движения электронов с учетом столкновений:

$$\frac{dv_{ex}}{dt} = -\frac{eE_x}{m_e} - \nu_e v_{ex} = -\frac{eE_0 \cos(\omega t)}{m_e} - \nu_e v_{ex}; \quad (5)$$

или: $\frac{dv_x}{dt} + \nu_e v_x = -\frac{eE_0 \cos \omega t}{m_e}$

Это уравнение типа: $y' + P(x)y = Q(x)$. Его решение имеет вид:

$$y = \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right) e^{-\int P(x) dx}$$

$$\text{У нас: } Q(x) = -\frac{eE_0}{m_e} \cos \omega t$$

$$P(x) = \nu, \quad e^{\int P(x)dx} = e^{\int \nu dt} = e^{\nu t}; \quad e^{-\int P(x)dx} = e^{-\nu t}$$

$$\begin{aligned} \text{Т.о. } v_x &= \left(-\int \frac{eE_0}{m_e} \cos \omega t \cdot e^{\nu t} dt + C\right)e^{-\nu t} = -\frac{eE_0}{m_e} e^{-\nu t} \int \cos \omega t \cdot e^{\nu t} dt = \\ & \quad (ce^{-\nu t} \text{ затухает со временем}) \\ &= -\frac{eE_0}{m_e} e^{-\nu t} \cdot e^{\nu t} \left(\frac{\nu}{\nu^2 + \omega^2} \cos \omega t + \frac{\omega}{\nu^2 + \omega^2} \sin \omega t \right), \end{aligned} \quad (6)$$

Отсюда:

$$j = -ne^2 v_e = \frac{ne^2 E_0}{m_e} \left(\frac{\nu}{\nu^2 + \omega^2} \cos \omega t + \frac{\omega}{\nu^2 + \omega^2} \sin \omega t \right) \quad (7)$$

$$\text{и } \sigma = \frac{j}{E} = \frac{ne^2}{m_e} \left(\frac{\nu}{\nu^2 + \omega^2} + \frac{\omega}{\nu^2 + \omega^2} \tan \omega t \right) \quad (8)$$

Как видно, с уменьшением частоты столкновений электронов (ν) величина первых слагаемых в (7) и (8) стремится к 0.

Средняя энергия, поглощаемая плазмой в единицу времени, равна

$$Q = \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle = \frac{\omega}{2\pi} Q_0 = \frac{\omega}{2\pi} E_0^2 \frac{ne^2}{m_e} \int_0^{2\pi/\omega} \left\{ \frac{\nu}{\nu^2 + \omega^2} \cos \omega t + \frac{\omega}{\nu^2 + \omega^2} \sin \omega t \right\} \cos \omega t dt \quad (9)$$

где Q_0 — энергия, поглощаемая плазмой за один период осцилляции поля E .

Т.к. $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$ — ортогональные функции, то $\int_0^{2\pi/\omega} \sin \omega t \cos \omega t dt = 0$.

Подсчитаем первое слагаемое:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t dt &= \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi/\omega} \cos \omega t d(\sin \omega t) = \frac{1}{\omega} \left[\int_0^{2\pi/\omega} d(\cos \omega t \sin \omega t) - \int_0^{2\pi/\omega} \sin \omega t d(\cos \omega t) \right] = \\ &= 0 + \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t dt = \int_0^{2\pi/\omega} (1 - \cos^2 \omega t) dt = \frac{2\pi}{\omega} - \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t dt \end{aligned}$$

Т.о.

$$2 \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t dt = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t dt = \frac{\pi}{\omega}$$

Подставляя полученный результат в (9), находим:

$$Q = \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{ne^2}{m_e} \frac{\pi}{\omega} \frac{\nu}{\nu^2 + \omega^2} E_0^2 = \frac{1}{2} \frac{ne^2}{m_e} \frac{\nu}{\nu^2 + \omega^2} E_0^2 \quad (9a)$$

Можно сделать вывод, что количество энергии, поглощаемой плазмой, определяется лишь той компонентой плотности тока, которая осциллирует в фазе с полем E .

Если от рассмотренных выше реальных величин E , ν , j и σ перейти к комплексным величинам

$$\tilde{E} = E_0 e^{i\omega t}; \quad \tilde{\nu} = \nu_0 e^{i\omega t} \text{ и т.д.,}$$

и $E = \text{Re}(\tilde{E})$, $v = \text{Re}(\tilde{v})$, и т.д.,

то равенство (5) примет вид:

$$i\omega\tilde{v}_e = -\frac{e\tilde{E}}{m_e} - \nu_e\tilde{v}_e. \quad (10)$$

Отсюда следует:

$$\tilde{v}_e = -\frac{e\tilde{E}}{m_e} \frac{1}{\nu + i\omega} = -\frac{e\tilde{E}}{m_e} \left(\frac{\nu}{\nu^2 + \omega^2} - i \frac{\omega}{\nu^2 + \omega^2} \right)$$

и

$$\tilde{j} = -ne\tilde{v} = \frac{ne^2}{m_e} E \left(\frac{\nu}{\nu^2 + \omega^2} - i \frac{\omega}{\nu^2 + \omega^2} \right) = \tilde{\sigma} E; \quad (11)$$

где

$$\tilde{\sigma} = \frac{ne^2}{m_e} \left(\frac{\nu}{\nu^2 + \omega^2} - i \frac{\omega}{\nu^2 + \omega^2} \right)$$

Сопоставляя выражения (9а) и (11) находим, что

$$Q = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{\sigma}) E^2 \quad (12)$$

Последний результат может быть получен и в более общем случае.

Итак, мы видим (из (9а) или из (12)), что в холодной плазме при $\nu \rightarrow 0$, скорость джоулевой диссипации энергии поля также стремится к нулю. Это объясняется тем, что под действием поля E холодные электроны осциллируют относительно своего среднего положения, не совершая в среднем никакой работы. Однако в горячей плазме некоторые частицы могут оказаться в резонансе с волной, в связи с чем проводимость среды может существенно измениться. В следующем параграфе мы рассчитаем эту проводимость.

§ 17. ЗАТУХАНИЕ ЛАНДАУ.

Рассмотрим электростатическую волну, распространяющуюся в квазинейтральной плазме, характеризующейся функциями распределения $f_{i,e}(v)$. Под действием поля волны концентрация частиц испытывает возмущение, так что $f_e = f_0 + f_1$ (полагаем волну настолько высокочастотной, что ее влиянием на движение ионов можно пренебречь, т.е. $f_i = f_0$).

Изменение функции распределения электронов со временем описывается кинетическим уравнением:

$$\frac{\partial f(v)}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)f(v) - \frac{e}{m_e} (\mathbf{E} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}) f = (-\nu_e f_1)_{\nu \rightarrow 0} \quad (13)$$

Рассматриваемая плазма — бесстолкновительная, и справа должен быть ноль. Однако нам проще будет допустить существование очень небольшой частоты столкновений, а затем устремить ее к нулю (Шафранов, 1963).

Будем искать решение в виде:

$$f_e = f_0(v) + f_1(v)e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})} \quad (14)$$

Тогда уравнение (13) принимает вид:

$$-i\omega f_1 + ikvf_1 - \frac{e}{m_e} E \frac{\partial}{\partial v} (f_0 + f_1) = -\nu f_1 \quad (15)$$

Мы учли то, что производные от f_0 по \mathbf{r} и t равны нулю, а $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$ и $\nabla = i\mathbf{k}$. Из (15) получаем:

$$\begin{aligned} f_1(-i\omega + ikv + \nu) &= \frac{e}{m_e} E \frac{\partial f_0}{\partial v} \\ -if_1(\omega - kv + i\nu) &= \frac{e}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v} E \\ f_1 &= i \frac{e}{m_e} E \frac{\partial f_0 / \partial v}{\omega - kv + i\nu} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= ne(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e) = n_0 e \int_{-\infty}^{\infty} (f_{0i}v - (f_{0e} + f_1)v) dv = \\ &= -n_0 e \int_{-\infty}^{\infty} f_1 v dv = -i \frac{n_0 e^2}{m_e} E \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v \partial f_0 / \partial v}{\omega - kv + i\nu} dv = \\ &= -i \frac{n_0 e^2}{m_e} E \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(\omega - kv - i\nu) \partial f_0 / \partial v}{(\omega - kv)^2 + \nu^2} dv = \\ &= -\frac{n_0 e^2}{m_e} E \int \frac{v \cdot \nu \partial f_0 / \partial v}{(\omega - kv)^2 + \nu^2} dv - i \frac{n_0 e^2}{m_e} E \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\omega - kv)v \partial f_0 / \partial v}{(\omega - kv)^2 + \nu^2} dv \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь функция $f(v)$ отнормирована так, что $\int f(\mathbf{v}) = 1$, а не n .

Рассмотрим множитель перед $(v \partial f_0 / \partial v)$ в подынтегральном выражении в первом члене правой части (17), учитывая что $\nu = 0$:

$$h(\nu) = \frac{\nu}{(\omega - kv)^2 + \nu^2} = 0 \text{ всюду, кроме точки } \omega - kv = 0, \text{ где } h(\nu) \rightarrow \infty.$$

Соответственно из (17),

$$\begin{aligned} Re(\sigma) &= -\frac{n_0 e^2}{m_e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu v \partial f_0 / \partial v}{(\omega - kv)^2 + \nu^2} dv = \\ &= -\frac{n_0 e^2}{m_e} \left(v \frac{\partial f}{\partial v} \right)_{\omega=kv} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu}{(\omega - kv)^2 + \nu^2} dv = \\ &= -\frac{n_0 e^2}{m_e} \left(v \frac{\partial f_0}{\partial v} \right)_{\omega=kv} \cdot \frac{\pi}{k} \end{aligned} \quad (18)$$

Мы использовали табличный интеграл:

$$\int \frac{dy}{y^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{y}{a}\right).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu dv}{(\omega - kv)^2 + \nu^2} = \frac{\nu}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{y^2 + \nu^2} = \frac{\nu}{k} \left(\frac{1}{\nu} \arctan \frac{y}{\nu} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{k} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{\pi}{k}$$

Здесь $y = kv - \omega$ и $dy = k dv$.

Из равенства (18) следует, что в соответствии с полученными выше результатами, $Re(\tilde{\sigma}) > 0$ и плазма поглощает энергию волны в случае $\partial f_0/\partial v < 0$ (например, максвелловская плазма), и, наоборот, при $\partial f_0/\partial v > 0$ проводимость становится отрицательной, и энергия волны возрастает за счет энергии резонансных частиц.

Декремент затухания (или инкремент нарастания) волны легко определяется из самых общих соображений. В самом деле, если в плазме не содержится сторонних источников поля, то изменение энергии ленгмюровской волны $\varepsilon = E_0^2/(8\pi)$ описывается равенством:

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = -Q(t), \quad (19)$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{E^2}{8\pi} \right) = -\frac{1}{2} Re(\sigma) E^2, \quad (19a)$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{E}{4\pi} \frac{dE}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{n_0 e^2}{m_e} \left(v \frac{\partial f_0}{\partial v} \right) \frac{\pi}{k} \cdot E^2; \\ \frac{dE}{E} &= \frac{4\pi n_0 e^2}{m_e} \left(v \frac{\partial f_0}{\partial v} \right) \frac{1}{2} \frac{\pi}{k} dt \rightarrow E = E_0 e^{-\gamma t} \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\gamma = -\frac{\Pi_e^2}{2} \left(v \frac{\partial f}{\partial v} \right) \Big|_{v=\omega/k} \cdot \frac{\pi}{k} \quad (21)$$

Таким образом, мы видим, что как проводимость среды, так и скорость диссипации энергии проходящей через нее электростатической волны оказываются отличными от нуля даже в полностью бесстолкновительной плазме.

Это и есть затухание Ландау.

Дополнительные вопросы:

1. Как будет вести себя γ , если в качестве f подставить максвелловское распределение?

§ 18. АНОМАЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ В ПЛАЗМЕ.

С затуханием Ландау тесно связано такое интересное и в то же время чрезвычайно важное явление как аномальное сопротивление в бесстолкновительной плазме. Напомним, в чем состоит данное явление. Обратимся к рис. 10, на котором представлена предполагаемая современными теоретическими моделями и в основных чертах подтвержденная экспериментом зависимость плотности тока в плазме (в отсутствие внешнего магнитного поля) от интенсивности приложенного электрического поля. Как видно из рисунка, в ходе кривой $j(E)$ можно выделить по крайней мере три интервала, соответствующие существенно различным формам закона Ома.

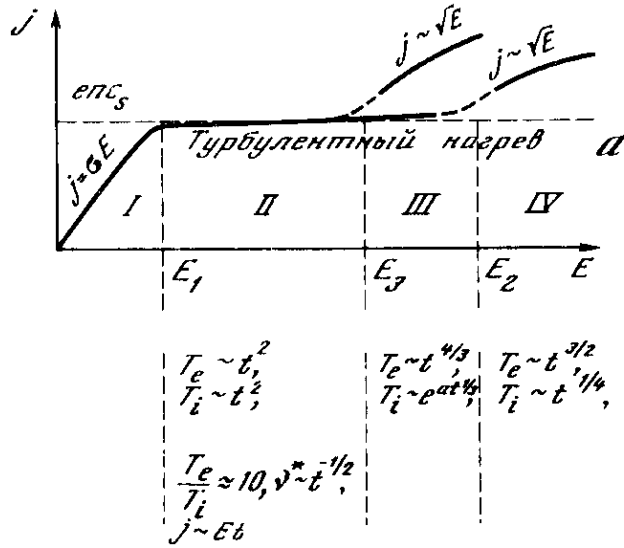


Рис. 10: Зависимость плотности тока в разреженной плазме от электрического поля (Липеровский, Пудовкин).

I. Область слабых электрических полей $E < E_1$ ($E_1 \approx \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \frac{e}{\lambda_D} \ln \Lambda$, где λ_D — дебаевский радиус; $\ln \Lambda$ — кулоновский логарифм; остальные обозначения стандартные). В этом диапазоне электрических полей силы Кулона, ускоряющие электроны, уравниваются силой трения и закон Ома имеет обычную форму $j = (ne^2/m_e \nu)E$, где ν — частота парных (кулоновских) столкновений электронов с ионами.

II. При достижении токовой скоростью электронов критических значений порядка скорости ионного звука $v_{e,kr} \approx c_s = [(T_e^* + T_i^*)/m_i]^{1/2}$ (T^* — температура частиц в энергетических единицах) в плазме развивается интенсивная плазменная турбулентность. При этом энергия, приобретаемая электронами при их движении в поле E , теряется в ходе их взаимодействия с волнами, в результате чего плотность тока почти не зависит от электрического поля, так что на кривой $j(E)$ образуется плато $j = c_s ne$. Существенное уменьшение плотности тока (до нескольких порядков величины) по сравнению с ее классическим значением эквивалентно соответствующему росту сопротивления плазмы, которое при учете специфической (некулоновской) природы взаимодействия частиц называют аномальным.

III и IV. При дальнейшем увеличении поля E свыше некоторого предела E_2 или E_3 , абсолютная величина которого зависит от конкретного механизма рассеяния и распада волн, плотность тока начинает вновь увеличиваться с ростом поля E , но уже значительно медленнее, чем на участке I: $j \sim E^{1/2}$ (Завойский, Рудаков) или даже $j \sim E^{1/3}$ (Галеев, Сагдеев).

Рассмотрим теперь вкратце физический механизм развития аномального сопротивления.

Выражение (21) иллюстрирует тот факт, что раскачка волн в плазме ($\gamma < 0$) возможна лишь в том случае, когда $(\partial f_0 / \partial v)_{\omega = kv} > 0$, т.е. плазма заведомо является неравновесной. Отклонение функции распределения частиц в плазме от максвелловской может быть обусловлено самыми разными причинами; нас же в связи с проблемой магнитосферной суббури интересуют прежде всего неустойчивости, связанные с протеканием в плазме достаточно сильных электрических токов. И в этом смысле рассмотренная нами только что

ленгмюровская неустойчивость оказывается, к сожалению, совершенно бесперспективной. В самом деле, при наличии электрического тока в плазме функция распределения электронов в лабораторной системе отсчета близка к максвелловской, сдвинутой на величину дрейфовой (токовой) скорости $u_j = -j/ne$, т.е. в функции распределения, казалось бы, имеет место искомый “горб”, обеспечивающий раскачку ленгмюровской волны. Следует, однако, напомнить, что высокочастотная ленгмюровская волна распространяется в электронном газе, и, если последний дрейфует со скоростью u_j , волна сносится вместе с ним, так что в лабораторной системе отсчета ее скорость $u = u_\phi + u_j$, где u_ϕ — фазовая скорость. При этом в области $v = \omega/k + u_j$ функция $f_0(v)$ монотонно убывает, т.е. условия раскачки волны не выполняются. Таким образом, генерация ленгмюровских волн в плазме электрическим током оказывается невозможной; для их возбуждения необходимо существование пучка быстрых электронов, движущихся относительно электронов фоновой плазмы.

Значительно более “удобными” для возбуждения электрическим током являются ионно-звуковые волны. Ионный звук представляет собой низкочастотную ветвь плазменных волн в термической плазме; в колебаниях, связанных с волной, участвуют не только электроны, но и ионы; при этом скорость ионного звука $c_s = [(T_e^* + T_i^*)/m_i]^{1/2}$, причем, что очень существенно, эта скорость дана в системе отсчета, связанной с ионами. Если плазма является изотермической ($T_e \approx T_i$), то скорость ионного звука близка к тепловой скорости ионов, вследствие чего волна быстро затухает; если же $T_e \gg T_i$, то $c_s \approx \sqrt{T_e^*/m_i} \approx v_{Te} \sqrt{m_e/m_i}$, при этом скорость волны в $\sqrt{m_i/m_e}$ раз меньше тепловой скорости электронов и в то же время в $\sqrt{T_e/T_i}$ раз больше тепловой скорости ионов. В этом случае волна затухает слабо, в связи с чем ионный звук чаще всего рассматривается именно в такой неизотермической плазме ($T_e \gg T_i$).

Рассматривая условия возбуждения ионно-звуковых волн в плазме с током, допустим, как и ранее, что плазма состоит из относительно холодных ионов и горячих электронов с функцией распределения, близкой к максвелловской, смещенной на величину токовой скорости электронов u_j . В этом случае

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{m_e(\mathbf{v} - \mathbf{u}_j)}{T_e^*} f_0. \quad (22)$$

Поскольку раскачка волны в данном случае происходит, как и в только что рассмотренном случае ленгмюровской волны, в результате ее взаимодействия с резонансными электронами, равенство (21) остается справедливым.

Используя (21) и (22), можно найти инкремент затухания (раскачки) ионно-звуковой волны (Кадомцев, 1976):

$$\gamma = -\frac{\omega^3}{k^2 c_s^2} \sqrt{\frac{\pi m_e}{8 T_e^*}} \left(u_j \cos \theta - \frac{\omega}{k} \right),$$

где θ — угол между направлением тока и волновым вектором \mathbf{k} . Для раскачки ионно-звуковых волн необходимо, чтобы токовая скорость электронов была больше скорости ионного звука c_s ($\omega/k \approx c_s$). Если токовая скорость достаточно велика, то частота, на которой развивается ионно-звуковая неустойчивость, близка к ионной плазменной частоте Π_i , а

$$\gamma \approx \Pi_i u_j \cos \theta / v_{Te}. \quad (23)$$

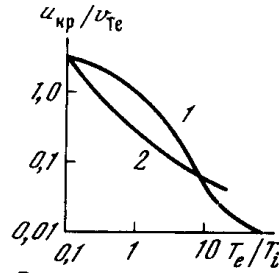


Рис. 11: Зависимость критической скорости электронов от величины T_e/T_i (Kindel, Kennel, 1971). 1 — ионно-звуковая неустойчивость; 2 — ионно-циклотронная неустойчивость.

Волновое число, на котором инкремент нарастания волны достигает максимума, $k = \omega/c_s \approx \Pi_i/c_s = 1/\lambda_D$.

Развитие ионно-звуковой неустойчивости является одной из основных причин роста аномального сопротивления в плазме.

При дальнейшем увеличении токовой скорости электронов может наблюдаться интересное явление: относительно медленные колебания ионов, наблюдающиеся на частоте $\omega = \Pi_i$ в неподвижной системе отсчета, могут оказаться в системе отсчета, движущейся с электронами, и при учете доплеровского сдвига частоты в резонансе с высокочастотными колебаниями электронов: $\omega - ku_j \approx \Pi_e$ (Арцимович, Сагдеев, 1979). При этом инкремент нарастания волн резко увеличивается, достигая значения Π_i . Развивающаяся при этом неустойчивость носит наименование бунемановской (Buneman, 1959). В то же время порог развития бунемановской неустойчивости оказывается, как видно из вышеизложенного, достаточно высоким: $u_j > v_{Te}$.

При наличии внешнего магнитного поля движение заряженных частиц существенно усложняется. В плазме появляются новые моды волн, наиболее существенными из которых применительно к рассматриваемой нами проблеме аномального сопротивления являются электростатические ионно-циклотронные волны. Дисперсионное уравнение, описывающее поведение этих волн, также оказывается достаточно сложным. В связи с этим ограничимся лишь констатацией некоторых основных фактов, характеризующих условия развития соответствующей неустойчивости.

На рис. 4 показана зависимость критической скорости электронов (в единицах v_{Te}), соответствующей началу развития ионно-звуковой (кривая 1) и ионно-циклотронной (мода Друммонда–Розенблюта, кривая 2) неустойчивостей, от величины отношения T_e/T_i . Как видно из рисунка, в случае $T_e/T_i \gg 1$ порог развития ионно-звуковых волн заметно ниже порога раскачки ионно-циклотронных волн. Однако в более реалистическом случае $T_e/T_i \approx 1$, напротив, раскачка ионно-циклотронных волн требует заметно меньшей токовой скорости электронов, чем раскачка ионно-звуковых волн.

Частота генерируемых в результате неустойчивости волн близка к гирочастоте ионов Ω_i (имеется в виду первая гармоника), увеличиваясь от $\omega \approx 1,1\Omega_i$ при $T_i/T_e = 0,1$ до $\omega \approx 1,6\Omega_i$ при $T_i/T_e = 3$. Инкремент нарастания волн

$$\gamma \approx \Omega_i u_j / v_{Te}. \quad (24)$$

Экспериментальные данные, полученные на спутнике S3-3 в авроральной магнитосфере на высотах порядка R_E (Mozer et al., 1979; Hudson et al., 1978; Cattell, 1981) убедительно свидетельствуют о том, что при наличии сильного внешнего магнитного поля и достаточ-

но интенсивных продольных токов ионно-циклотронная турбулентность является одним из основных видов волновой турбулентности.

Аномальное сопротивление и частота коллективных столкновений в турбулентной плазме. Приведенный выше анализ условий раскачки волн в плазме с током выполнен в линейном приближении и потому ничего не может сказать об амплитуде волн, устанавливающейся при заданных условиях. Для решения этого вопроса необходимо рассмотреть нелинейные процессы в плазме, что, безусловно, выходит далеко за рамки нашего курса. Поэтому, не пытаясь рассчитать амплитуду волн в плазме (допустим, что она нам известна из эксперимента), оценим величину аномального сопротивления (Арцимович, Сагдеев, 1979). Для этого воспользуемся следующими соображениями. Как мы уже говорили, раскачка волн происходит в результате их взаимодействия с резонансными частицами; при этом импульс, приобретаемый волной, соответственно теряется частицами. Импульс, переносимый волной, $\mathbf{p} = W_s \mathbf{k} / \omega$, где W_s — энергия волны (Кадоццев, 1976). Если инкремент нарастания волны равен γ , то импульс, получаемый волной в единицу времени, равен $\gamma W_s k / \omega$. Приравнивая эту величину импульсу, теряемому в единицу времени электронами, $\Delta p_e = n_0 m_e u_j \nu^*$, где ν^* — частота коллективных столкновений, и полагая $\mathbf{k} \parallel \mathbf{j}$, получаем

$$\nu^* = \frac{1}{n_0 m_e u_j} \gamma W_s \frac{k}{\omega}.$$

Подставляя величину γ из (23) и принимая $\omega/k = c_s$, находим для ионно-звуковой неустойчивости

$$\nu_{н.з.}^* \approx \Pi_i W_s / n_0 T_e^*. \quad (25)$$

Аналогичное рассмотрение применительно к бьюнемановской и ионно-циклотронной турбулентности дает следующие выражения для эффективной частоты столкновений:

$$\nu_6^* \approx 1, 2 \Pi_i, \quad (26)$$

$$\nu_{и.ц.}^* \approx \Omega_i. \quad (27)$$

Напомним, что выражения (25)–(27) являются весьма грубыми (по максимуму) оценками частоты коллективных столкновений, и для расчета величины ν^* в конкретной ситуации необходимо знать по крайней мере спектр турбулентности, т.е. распределение интенсивности волн $W_s(k)$.

Развитие аномального сопротивления в плазме приводит не только к существенному ограничению плотности токов; не менее существенным эффектом волновой турбулентности плазмы является быстрый разогрев образующих ее частиц, преимущественно электронов (Арцимович, Сагдеев). В самом деле, при раскачке неустойчивости на электроны плазмы действует сила трения

$$F_{тр} = -\nu^* n_0 m_e u_j = -\gamma W_s k / \omega. \quad (28)$$

Работа этой силы затрачивается на нагрев электронов, т.е.

$$d(n_e T_e^*) / dt = F_{тр} u_j = \gamma W_s u_j k / \omega. \quad (29)$$

В то же время энергия, получаемая волной от электронов, в стационарном режиме переходит в результате рассеяния волн на ионах в тепловую энергию последних, т.е.

$$d(n_i T_i^*)/dt = \gamma W_s. \quad (30)$$

Сопоставляя выражения (29) и (30), нетрудно видеть, что при $n_i = n_e = n_0$

$$dT_e^*/dT_i^* = u_j k/\omega = u_j/u_\phi. \quad (31)$$

Как показано в работе (Арцимович, Сагдеев, 1979), выражение (31) носит универсальный характер, т.е. не зависит от спектра турбулентности и конкретного вида неустойчивости.

Поскольку для большинства неустойчивостей $u_j \gg u_\phi$, из выражения (31) следует, что электроны действительно греются много быстрее ионов.

Заканчивая раздел, приведем таблицу, суммирующую основные сведения об условиях и закономерностях развития различного вида неустойчивостей (Галеев, Сагдеев, 1973), дополнив ее сведениями относительно частоты коллективных столкновений ν^* .

Характеристики разных типов неустойчивости плазмы с электрическим током

Тип неустойчивости	Порог неустойчивости	Частота	Инкремент затухания	ν^*
Бунемана	$u_j \geq v_{Te}$	$\sim \Pi_i$	$\sim \Pi_i$	$\sim \Pi_i$
Ионно-звуковая	$u_j > \sqrt{T_e^*/m_j}$	$\sim \Pi_i$	$\sim \Pi_i u_i/v_{Te}$	$\sim \Pi_i W_s/nT_e^*$
Электростатические моды*	$u_j < v_{Ti}$	$\ll \Omega_e$	$\sim \sqrt{\Omega_i \Omega_e}$	—
Ионно-циклотронная	$u_j \geq \sqrt{T_i^*/m_i}$	$\sim \Omega_i$	$\sim \Omega_i u_j/v_{Te}$	$\sim \Omega_i$

* Неустойчивости этого типа развиваются в токах, текущих поперек магнитного поля, в связи с чем величина ν^* в них имеет иной, чем в остальных случаях, смысл и поэтому не приводится.

§ 19. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С ПОЛЕМ ВИСТЛЕРА.

Из дисперсионного уравнения для электромагнитных волн в холодной плазме следует, что в плазме в направлении вдоль внешнего магнитного поля \mathbf{B}_0 могут распространяться циркулярно-поляризованные волны. Эти волны могут иметь правую (R-волны) и левую (L-волны) круговую поляризацию. Это означает, что вектор электрического поля в такой волне с течением времени поворачивается по часовой стрелке (R) или против часовой стрелки (L) соответственно, если смотреть по направлению вектора \mathbf{B}_0 .

Дисперсионные уравнения для этих волн записываются в виде

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\Pi_e^2/\omega^2}{1 - (\Omega_e/\omega)}, \quad \text{R-волна,}$$

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\Pi_e^2/\omega^2}{1 + (\Omega_e/\omega)}, \quad \text{L-волна.}$$

R-волна в низкочастотной области ($\omega < \Omega_e$) называется **вистлером**. Из дисперсионного уравнения следует:

$$\frac{u_\Phi^2}{c^2} = \frac{\frac{\Omega_e}{\omega} - 1}{\frac{\Pi_e^2}{\omega^2} + \frac{\Omega_e}{\omega} - 1} \simeq \frac{\Omega_e \omega}{\Pi_e^2} < 1, \quad \text{при малых } \omega.$$

Рассмотрим волну типа вистлера, распространяющуюся вдоль оси x , которая направлена вдоль внешнего магнитного поля \mathbf{B}_0 : $\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 \exp(-i(\omega t - kx))$. Очевидно, что для того, чтобы волна могла достаточно эффективно воздействовать на частицу, вектор электрического поля волны должен вращаться приблизительно синхронно с частицей, т.е. в системе отсчета, движущейся с частицей, частота волны с учетом ее доплеровского смещения должна равняться гирочастоте соответствующей частицы (иона или электрона)

$$\omega - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_\parallel) = \Omega_{e,i} \quad (32)$$

Напомним, что $\Omega_e > 0$ и $\Omega_i < 0$. Поскольку $\Omega_e > \omega$ (условие существования вистлера), резонирующий с ним электрон должен двигаться навстречу волне; при этом для того, чтобы доплеровское смещение частоты было значительным, скорость частицы должна быть относительно велика ($v_\parallel \gg u_\Phi$).

Гирочастота протона $\Omega_i < 0$; поэтому для того, чтобы оказаться в резонансе с вистлером, он должен двигаться в ту же сторону, что и волна, но быстрее ее (аномальный эффект Доплера).

Рассмотрим, как меняется энергия частицы в результате ее взаимодействия с полем волны. Для этого запишем уравнение движения частицы в поле волны, распространяющейся вдоль внешнего однородного поля $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_x$, в системе отсчета, движущейся с произвольной, но постоянной скоростью (\mathbf{v}_c) вдоль оси X .

$$m \frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \varepsilon e \{ \delta \mathbf{E}' + \frac{1}{c} \mathbf{v}' \times (\mathbf{B}_0 + \delta \mathbf{B}) \} \quad (33)$$

Здесь \mathbf{v}' — скорость частицы в движущейся системе отсчета ($\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_c$), $\varepsilon (= \pm 1)$ — знак заряда частицы, $\delta \mathbf{E}$, $\delta \mathbf{B}$ — электрическое и магнитное поля волны, связанные между собой уравнениями Максвелла:

$$\text{rot}(\delta \mathbf{E}') = -\frac{1}{c} \frac{\partial(\delta \mathbf{B})}{\partial t}$$

$$i\mathbf{k} \times \delta \mathbf{E}' = i \frac{\omega'}{c} \delta \mathbf{B} \rightarrow$$

$$\delta \mathbf{B} = \frac{c}{\omega'} \mathbf{k} \times \delta \mathbf{E}' = \frac{ck}{\omega'} \mathbf{e}_x \times \delta \mathbf{E}'. \quad (34)$$

ω' — частота волны, измеряемая в той же движущейся системе отсчета, то есть $\omega' = \omega - kv_c$.

Подставляя (34) в (33) и учитывая, что $\delta \mathbf{E}' \perp \mathbf{e}_x$, получаем (в проекции на ось X):

$$\begin{aligned} m \frac{dv'_\parallel}{dt} &= \varepsilon e \{ \delta \mathbf{E}'_x + \frac{1}{c} [\mathbf{v}' \times \mathbf{B}_0]_x + \frac{1}{c} \frac{ck}{\omega'} [\mathbf{v}' \times (\mathbf{e}_x \times \delta \mathbf{E}')]_x \} = \\ &= \varepsilon e \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{ck}{\omega'} (\mathbf{v}' \times [\mathbf{e}_x \times \delta \mathbf{E}'])_x = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varepsilon ek}{\omega'} (\mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{E}') - \delta \mathbf{E}'_x (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{e}_x))_x = \\
&= \frac{\varepsilon ek}{\omega'} (\mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{E}')
\end{aligned} \tag{35}$$

Равенство (35) записано в произвольной инерциальной системе отсчета. Конкретизируем эту систему. Для этого рассмотрим резонансную частицу, скорость которой удовлетворяет равенству (32), и в качестве скорости системы выберем $v_c = v_{\text{рез}}$. Тогда (35) можно переписать в виде:

$$m \frac{dv'_{\parallel}}{dt} = m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{\varepsilon ek}{\omega - k \cdot v_{\text{рез}}} (\mathbf{v}' \cdot \delta \mathbf{E}') = \frac{k}{\omega - kv_{\text{рез}}} (\varepsilon e \delta E' \cdot v') = \frac{k}{\omega - kv_{\text{рез}}} \cdot \frac{dW'_{\perp}}{dt} \tag{36}$$

Умножим равенство (36) на v_{\parallel} и перейдем в неподвижную систему отсчета:

$$\begin{aligned}
&\left(v_{\parallel} = v_{\text{рез}} + v'_{\parallel}; \quad \frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{dv'_{\parallel}}{dt}; \quad W'_{\perp} = W_{\perp} \right) \\
&mv_{\parallel} \frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv_{\parallel}^2}{2} \right) = \frac{kv_{\parallel}}{\omega - kv_{\text{рез}}} \cdot \frac{dW_{\perp}}{dt}. \\
&\frac{d}{dt} (W_{\parallel}) = \frac{kv_{\parallel}}{\omega - kv_{\text{рез}}} \cdot \frac{dW_{\perp}}{dt} = \frac{v_{\parallel}}{u_{\text{фаз}} - v_{\text{рез}}} \frac{dW_{\perp}}{dt}
\end{aligned} \tag{37}$$

Принимая во внимание, что полная энергия частицы $W = W_{\perp} + W_{\parallel}$, находим из равенства (37) (рассматривается резонансная частица, т.е. $v_{\parallel} = v_{\text{рез}}$):

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} (W_{\parallel} + W_{\perp}) = \begin{cases} \frac{dW_{\parallel}}{dt} \left(1 + \frac{u_{\text{фаз}} - v_{\parallel}}{v_{\parallel}} \right) = \frac{u_{\text{фаз}}}{v_{\parallel}} \cdot \frac{dW_{\parallel}}{dt} \\ \frac{dW_{\perp}}{dt} \left(\frac{v_{\parallel}}{u_{\text{фаз}} - v_{\parallel}} + 1 \right) = \frac{u_{\text{фаз}}}{u_{\text{фаз}} - v_{\parallel}} \frac{dW_{\perp}}{dt} \end{cases} \tag{38}$$

Рассмотрим случай, когда в результате взаимодействия с полем волны полная энергия частицы уменьшается ($\frac{dW}{dt} < 0$), то есть происходит раскачка волн.

1) В случае раскачки электронами (электрон движется навстречу волне): $u_{\text{ф}} \uparrow \downarrow v_{\parallel}$

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = \frac{u_{\text{фаз}} - v_{\text{рез}}}{u_{\text{фаз}}} \frac{dW}{dt} < 0 \text{ — поперечная энергия уменьшается} \tag{39}$$

$$\frac{dW_{\parallel}}{dt} = \frac{v_{\text{рез}}}{u_{\text{фаз}}} \frac{dW}{dt} > 0 \text{ — продольная энергия увеличивается}$$

Таким образом, вместе с уменьшением энергии резонансного электрона происходит уменьшение его питч-угла. При этом, поскольку в типичных для магнитосферы условиях $|v_{\text{рез}}| \gg |u_{\text{фаз}}|$, скорость изменения как поперечной, так и продольной энергии оказывается много больше скорости изменения полной энергии частицы. Следовательно, в результате

взаимодействия электрона с полем вистлера, в отличие от взаимодействия с полем ленгмюровской волны меняется в основном питч-угол частицы, но не ее энергия.

2) В случае раскачки протонами: $u_{\phi} \uparrow \uparrow v_{\text{рез}}$

Из (38) имеем:

$$\frac{dW_{\perp}}{dt} = \frac{u_{\text{фаз}} - v_{\text{рез}}}{u_{\text{фаз}}} \frac{dW}{dt} > 0 \quad (40)$$

$$\frac{dW_{\parallel}}{dt} = \frac{v_{\text{рез}}}{u_{\text{фаз}}} \frac{dW}{dt} < 0$$

Т.о. в результате взаимодействия протонов с вистлерами, их питч-угол увеличивается.

Полученные результаты позволяют также указать характер функции распределения частиц по питч-углам, благоприятный для развития неустойчивости вистлеров. В самом деле, из (39) и (40) следует, что усиление волн (условие развития неустойчивости) связано с уменьшением питч-углов резонансных электронов или с увеличением питч-углов резонансных протонов. А так как в результате развития неустойчивости плазма должна перейти в состояние с более устойчивой функцией распределения, то можно ожидать, что первоначальная функция распределения резонансных электронов должна обеспечивать преобладание частиц с большими питч-углами; если же вистлеры генерируются резонансными протонами, то среди последних должны преобладать частицы с малыми питч-углами.

Итак, мы убедились в том, что в результате взаимодействия частиц с волнами, распространяющимися в плазме, питч-углы этих частиц могут существенно изменяться. Для того, чтобы подсчитать это изменение питч-угла (а также и энергии) частиц, необходимо знать мгновенное значение скорости частицы, фазу ее ларморовского вращения и соответствующие характеристики (интенсивность полей E и B , фаза и др.) волны, взаимодействующей с частицей. Совершенно очевидно, что определение всех этих величин для каждой отдельной частицы нереально, и возможно лишь описание плазмы в терминах статистических или вероятностных характеристик, таких как, например, функция распределения частиц. Изменение функции распределения со временем в приближении непрерывного взаимодействия описывается уравнением Фоккера–Планка и вытекающим из него уравнением диффузии.

Дополнительные вопросы:

1. Какую роль в изучении магнитосферы играют волны вистлера?

§ 20. УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА–ПЛАНКА.

Франк-Каменецкий, гл. VI, § 4

Ранее мы рассматривали бесстолкновительную плазму, т.е. полагали, что непосредственное взаимодействие между частицами отсутствует, движение частиц зависело только от

распределения электромагнитного поля в данный момент времени. Один из способов учесть столкновения между частицами состоит во введении соответствующего члена в уравнение Больцмана. Однако есть и другой способ. Поскольку в плазме взаимодействие между частицами осуществляется посредством далекодействующих кулоновских сил, то направление движения частиц меняется в основном непрерывно (т.е. практически отсутствуют "столкновения", когда происходит скачкообразное изменение направления движения). Поведение функции распределения в приближении такого непрерывного взаимодействия описывается **уравнение Фоккера – Планка**.

Рассмотрим плазму, характеризующуюся набором параметров (например, положение, скорость и питч-угол частиц, их магнитный момент и др.); всю совокупность этих параметров обозначим символом X , а функцию распределения по этим параметрам $f(X)$.

Пусть Δt — интервал времени, большой в том смысле, что за это время отдельные частицы успеют испытать большое количество индивидуальных актов рассеяния, но малый в том смысле, что среднее квадратичное изменение параметров $\langle \Delta X^2 \rangle$ остается малым. При этих условиях функция $f(X, t + \Delta t)$, определяющая вероятность значения X для рассматриваемых нами параметров в момент времени $t + \Delta t$, может быть выражена через функцию $f(X', t)$, определяющую вероятность значений X' в момент времени t , соотношением:

$$f(X, t + \Delta t) = \int f(X', t)w(X', X, \Delta t) \cdot dX' = \int f(X', t)w(X', \Delta X, \Delta t)d(\Delta X) \quad (1)$$

где $\Delta X = X' - X$, и $w(X', \Delta X, \Delta t)$ есть вероятность перехода из состояния X' в состояние X за время Δt .

Разлагая левую часть уравнения (1) в ряд Тэйлора по степеням Δt и подынтегральную часть в правой части (1) в ряд Тэйлора по степеням ΔX_i , получаем:

$$\begin{aligned} f(X, t + \Delta t) &= f(X, t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \dots = \\ &= \int \{ f(X, t) \cdot w(X, \Delta X, \Delta t) + \sum_i \frac{\partial}{\partial X_i} (f \cdot w) \Delta X_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k} (f \cdot w) \Delta X_i \Delta X_k \} \cdot d(\Delta X) = \\ &= f(X, t) \int w \cdot d(\Delta X) + \sum_i \frac{\partial}{\partial X_i} (f \cdot \int \Delta X_i w d(\Delta X)) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k} (f \int \Delta X_i \Delta X_k w d(\Delta X)) \end{aligned} \quad (2)$$

Далее учтем, что

$$\int w(X, \Delta X, \Delta t) d(\Delta X) = 1 - \quad (3)$$

вероятность того, что за конечное время Δt система перейдем из состояния X в какое-то иное (может быть, то же самое) состояние, равна 1.

$$\int w \Delta X_i d(\Delta X) = \langle \Delta X_i \rangle; \quad (3a)$$

$$\int w \Delta X_i \Delta X_k d(\Delta X) = \langle \Delta X_i \cdot \Delta X_k \rangle,$$

где фигурными скобками обозначена средняя величина. Тогда уравнение (2) принимает вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\Delta t} \sum_i \frac{\partial}{\partial X_i} (f \langle \Delta X_i \rangle) + \frac{1}{2\Delta t} \sum_{i,k} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_k} (f \langle \Delta X_i \Delta X_k \rangle). \quad (4)$$

Вводя обозначения:

$$\left. \begin{aligned} A_i &= -\frac{\langle \Delta X_i \rangle}{\Delta t}, \text{ и} \\ B_{ik} &= \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta X_i \cdot \Delta X_k \rangle}{\Delta t}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где A_i и B_{ik} — уравнения Фоккера–Планка, запишем уравнение (4) в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial X_i} \{ A_i f(X, t) - \sum_k \frac{\partial}{\partial X_k} (B_{ik} f(X, t)) \}. \quad (6)$$

Уравнение (6), описывающее изменение функции распределения со временем в результате столкновений, есть уравнение Фоккера–Планка.

В простейшем случае, когда коэффициенты A_i и B_{ik} не зависят от X_i, X_k (а это имеет место в том случае, когда вероятность перехода системы из состояния X' в состояние X зависит только от величины ΔX), уравнение (6) принимает вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum \frac{\partial}{\partial X_i} \left(A_i f - \sum_k B_{ik} \frac{\partial f}{\partial X_k} \right) \quad (7)$$

Если величины X_i являются компонентами вектора \mathbf{X} , то коэффициенты A_i становятся составляющими вектора \mathbf{A} , а коэффициенты B_{ik} — компонентами тензора B . В этом случае уравнение (7) можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{J}, \quad (8)$$

где $\mathbf{J} = \mathbf{A}f - B\nabla f$ — обобщенный поток по величине X . Коэффициенты A_i образуют вектор скорости переноса по величине X , а коэффициенты B_{ik} — тензор обобщенных коэффициентов диффузии.

Если за величину \mathbf{X} принять вектор положения в обычном пространстве, то уравнение Фоккера–Планка описывает процессы переноса. Если же за \mathbf{X} принять вектор \mathbf{v} , то уравнение Фоккера–Планка описывает диффузию в пространстве скоростей.