Ал. А. Ковтун

ОБ УРАВНЕНИЯХ МОДЕЛИ БИО И ИХ МОДИФИКАЦИЯХ

На основе материалов публикаций многих авторов рассматриваются различные представления уравнений, описывающие взаимосвязанное распространение волн в пористой флюидонасыщенной среде, для которой Я. И. Френкель [1] и М. Био [2, 4] ввели двухфазную модель среды. Большое внимание уделяется также моделям диссипации пористой среды и способам ее учета в уравнениях состояния.

Теория Био (Biot A. [2–5]) — линейная теория эффективных двухфазных сред (модель среды состоит из жесткого пористого каркаса и флюида, заполняющего поры), уравнения которой выводятся при некоторых допущениях на основе постулирования определений функции плотности энергии упругой деформации и кинетической энергии. С использованием иных подходов (чем у Био) и математически более строгой техники осреднения разными авторами были получены макроскопические уравнения пороупругости (см., например, Санчес-Паленсия [6], Burridge и Keller [7], В. Н. Николаевский [8], Berryman J. G., Thigpen L. [9], Whitaker [10], Pride и др. [11], Л. А. Молотков [12]), которые в целом согласуются с теорией Био в случае слабовязкого насыщающего флюида.

Фундаментальное свойство упруго-пористой насыщенной среды, следующее из теории Био, состоит в том, что в таких средах могут распространяться две продольные волны, быстрая и медленная, а также поперечная волна.

Возмущенное состояние упруго-пористой среды характеризуется двумя полями осредненных векторов смещений: $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_k, t)$ для жесткого пористого каркаса и $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x_k, t)$ для жидкости в поровом пространстве или же смещений флюида относительно каркаса $\mathbf{w} = \phi(\mathbf{U} - \mathbf{u})$, где ϕ — коэффициент пористости. При этом внешним проявлением деформаций является поле смещений $\mathbf{u}$, которое непосредственно регистрируют приборы и давление флюида p_f, тогда как смещение $\mathbf{U}$ или $\mathbf{w}$ не измеряется, но может быть вычислено в результате решения соответствующей математической задачи.

Уравнения Био имеют ту же структуру, что и уравнения упругой среды, состоят из уравнений закона Гука и уравнений сплошной среды. Как и в случае упругости из уравнений пористой среды могут быть исключены напряжения и получены уравнения типа Ламе для пористой среды. Упомянутые системы уравнений пористой среды Био могут быть записаны в трех представлениях. В первое представление входят смещения $\mathbf{u}$ и $\mathbf{U}$ и напряжения твердой и жидкой фаз $\sigma^{(s)}$ и $\sigma^{(f)}$. Однако это представление неудобно использовать в задачах на распространение волн в случае слоистых сред, так как не все величины, непрерывные на границах раздела, входят в уравнения первого представления [12]. Во второе представление входят смещения $\mathbf{u}$ в упругой (твердой) фазе, суммарные напряжения τ, а также давление p флюида и относительные смещения в жидкой фазе $\mathbf{w}$. В третьем представлении в уравнения пороупругости входят смещение $\mathbf{u}$, полное напряжение τ и флюидное давление p, при этом смещение $\mathbf{w}$ или $\mathbf{U}$ исключается из модифицированных уравнений движения среды.

Важное усложнение уравнений Био состоит в учете дисперсии и поглощения. Основной эффект диссипации в однородной среде Био связан с трением на границах между жидкостью и каркасом в порах (механизм вязкой диссипации) и приводит к введению дополнительных членов в уравнения движения Био. В случаях некоторых моделей диссипации предлагается вводить добавочные члены с ядрами релаксации, а также учитывать неидеальность обеих фаз (например, вязко-пороупругие модели среды). У разных типов волн влияние диссипации проявляется различным образом. Для медленной продольной волны результат вязкой диссипации является наиболее сильным с частотно-зависимым затуханием, которое делает эту волну труднонаблюдаемой во флюидонасыщенных породах.

Наряду с уравнениями пористая среда характеризуется также выражениями для плотностей потенциальной и кинетической энергий, которые являются положительно определенными квадратичными формами от производных смещений. Между уравнениями Био и этими квадратичными формами существует однозначная связь, состоящая в том, что закон Гука и выражение для плотности потенциальной энергии характеризуются одной и той же положительно определенной матрицей [12]. Аналогичная связь имеет место между уравнением движения и выражением для плотности кинетической энергии. Выражения для плотности энергии упругой деформации и кинетической энергии пористых сред Био являются обобщениями соответствующих выражений в случае упругой и жидкой сред.

1. Элементы теории Био для анизотропной упруго-пористой флюидонасыщенной среды в низкочастотной области

В терминах смещений $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ плотность потенциальной энергии упругой деформации W дана в [4] в виде следующей квадратичной формы:*

$$W = \frac{1}{2}C_{ik,qm}e_{ik}e_{qm} + Q_{kq}e_{kq}\zeta + \frac{1}{2}M\zeta^2. \tag{1}$$

Здесь $C_{ik,qm}$, Q_{qm}, M — (эффективные упругие) параметры пористой насыщенной среды, $Q_{qm} = \alpha_{qm}M$; $C_{kq,ml}$ — компоненты тензора $\mathbf{C}$ (аналог тензора упругости) каркаса, насыщенного флюидом, $k, q, m, l = 1, 2, 3$; Q_{kl} — элементы тензора $\mathbf{Q}$ второго ранга, характеризующие связь между объемными изменениями твердого каркаса и флюида, $k, l = 1, 2, 3$; $e_{km}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k}\right)$ — компоненты тензора деформации каркаса; $\zeta = -\operatorname{div}\mathbf{w}$.

Величина плотности кинетической энергии E представляется квадратичной формой

$$E = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 + \rho_f\frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial w_i}{\partial t} + \frac{1}{2}m_{ij}\frac{\partial w_i}{\partial t}\frac{\partial w_j}{\partial t}, \tag{2}$$

где $\rho = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s$ — плотность пористого материала в целом; ρ_s и ρ_f — плотности упругого каркаса и флюида; m_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ — элементы симметричной и положительно определенной матрицы эффективных плотностей (тензор второго ранга,

*Здесь и далее используется правило суммирования по повторяющимся значкам.

определяемый геометрией порового пространства (тензором извилистости) и плотностью флюида). Для сред со статистически-изотропным полем микроскоростей флюида $m_{ij} = \rho_m \delta_{ij}$, где δ_{ij} — функция Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$).

Для низкочастотной области функция диссипации D определяется в [4] квадратичной формой

$$D = \frac{1}{2}\eta s_{ij} w_i w_j,$$

где η — вязкость флюида, $(s_{ij}) = (\kappa_{ij})^{-1}$ — положительно-определенная симметричная матрица фильтрационного сопротивления, обратная к матрице (κ_{ij}) тензора проницаемости среды.

Из (1) и выражения для вариации потенциальной энергии

$$\delta W = \tau_{ij}\delta e_{ij} + p\delta\zeta$$

следуют соотношения связи между напряжениями и деформациями, записываемые для общего случая анизотропии в виде

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & q_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & q_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} & q_3 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} & q_4 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} & q_5 \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} & q_6 \\ q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{31} \\ 2e_{12} \\ \zeta \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где τ_{ij} — элементы полного тензора напряжений пористой насыщенной среды; p — давление флюида.

Таким образом, произвольно-анизотропная пористая среда Био характеризуется симметричной матрицей системы (3), обозначаемой далее через $A_{7\times7}$, с 28 упругими коэффициентами: 21 параметр $c_{ij} = c_{ji}$, 6 коэффициентов q_i и M. Связь между парами индексов (kq) и (ml) элементов $C_{kq,ml}$ тензора $\mathbf{C}$ и индексами $i,\ j$ элементов c_{ij} устанавливается по следующей схеме: $(1) \longleftrightarrow (11),\ (2) \longleftrightarrow (22),\ (3) \longleftrightarrow (33),\ (4) \longleftrightarrow (23) = (32),\ (5) \longleftrightarrow (13) = (31),\ (6) \longleftrightarrow (21) = (22)$. Аналогичным образом устанавливается связь элементов q_i $(i = 1, 2, ..., 6)$ с элементами Q_{kl} $(k, l = 1, 2, 3)$ матрицы тензора $\mathbf{Q}$.

В (3) предполагается положительная определенность матрицы $A_{7\times7}$, а также матриц (c_{ij}) и Q. Тензоры $\mathbf{C}$ и $\mathbf{Q}$ обладают свойством симметрии

$$C_{ij,mk} = C_{mk,ij} = C_{ji,mk} = C_{ij,km}, \quad Q_{ij} = Q_{ji}$$

и позволяют записать соотношения (3) в виде

$$\begin{aligned} \tau_{ki} &= C_{ki,qm} e_{qm} + Q_{ki}\zeta, \\ p &= -Q_{kq} e_{kq} + M\zeta. \end{aligned} \tag{4}$$

При установлении структуры матрицы $A_{7\times7}$ обычно исходят из факта инвариантности величины W относительно афинных ортогональных преобразований координат.

Пользуясь тензорным характером введенных таблиц $(c_{kq,ml})$ и (Q_{kl}) запишем закон их преобразования:

$$C'_{ab,cd} = \frac{\partial x'_a}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x'_b}{\partial x_\beta}\frac{\partial x'_c}{\partial x_\gamma}\frac{\partial x'_d}{\partial x_\sigma}C_{\alpha\beta\gamma\sigma}, \quad Q'_{ab} = \frac{\partial x'_a}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x'_b}{\partial x_\beta}Q_{\alpha\beta} \tag{5}$$

при переходе от одной системы координат $\{x_k\}$ к другой подобной системе $\{x'_k\}$, связанной с первой формулами преобразования

$$x'_k = a_{ki}x_i, \quad a_{ki}a_{qi} = \delta_{kq}.$$

Здесь a_{ki} — матрица преобразования системы координат.

Число независимых коэффициентов матрицы $A_{7\times7}$, сохраняющих свое значение при переходе от одной системы координат к другой, определяется в зависимости от типа симметрии среды числом возможных инвариантов (квадратичных форм), содержащихся в выражении для плотности энергии деформации W анизотропной пористой среды.

В случае изотропной среды W представляется суммой четырех квадратичных форм от инвариантов тензора деформации e_{ij} пористого каркаса и инварианта деформации флюида ζ [4]:

$$2W = (\lambda_c + 2\mu)(e_{11} + e_{22} + e_{33})^2 + \mu({e_{23}}^2 + {e_{13}}^2 + {e_{12}}^2 - 4e_{22}e_{33} - 4e_{11}e_{33} - 4e_{11}e_{22}) +$$
$$+ 2q(e_{11} + e_{22} + e_{33})\zeta + M\zeta^2,$$

где λ_c, μ, q, M — упругие константы пористого материала. Матрица системы (3) в этом случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_c + 2\mu & \lambda_c & \lambda_c & 0 & 0 & 0 & q \\ \lambda_c & \lambda_c + 2\mu & \lambda_c & 0 & 0 & 0 & q \\ \lambda_c & \lambda_c & \lambda_c + 2\mu & 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ q & q & q & 0 & 0 & 0 & M \end{pmatrix}. \tag{6}$$

В случае трансверсально-изотропной среды Био, ось симметрии которой совпадает с осью Ox_3 системы координат, выражение для W содержит уже восемь инвариантов с коэффициентами ($c_{11} = \lambda_c + 2\mu$; $c_{33} = \lambda_c + 2\mu - p$; $c_{44} = \mu - m$; $c_{66} = \mu$; $c_{13} = \lambda_c - l$, q_1, q_2, R). Упругие константы входят в матрицу $A_{7\times7}$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \lambda_c + 2\mu & \lambda_c & \lambda_c - l & 0 & 0 & 0 & q_1 \\ \lambda_c & \lambda_c + 2\mu & \lambda_c - l & 0 & 0 & 0 & q_1 \\ \lambda_c - l & \lambda_c - l & \lambda_c + 2\mu - p & 0 & 0 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu - m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ q_1 & q_1 & q_2 & 0 & 0 & 0 & M \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Сопоставление (6) с (7) показывает, что при $l = p = m = 0$ и $q_2 = q_1 = q$ трансверсально-изотропная среда вырождается в изотропную.

Ортотропная пористая среда, оси симметрии которой совмещены с осями координатной системы $\{x_k\}$, описывается матрицей

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & q_1 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & q_2 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 \\ q_1 & q_2 & q_3 & 0 & 0 & 0 & M \end{pmatrix}. \tag{8}$$

В случае неоднородной и произвольно-анизотропной среды Био система уравнений движения относительно компонент векторов смещений u_i и w_i имеет вид [4]

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ij,mk}\frac{\partial u_m}{\partial x_k} - Q_{ij}\delta_{mk}\frac{\partial w_m}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho u_i + \rho_f w_i\right) \quad (i = 1, 2, 3), \tag{9}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\delta_{ij}Q_{mk}\frac{\partial u_m}{\partial x_k} - M\delta_{ij}\delta_{mk}\frac{\partial w_m}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\rho_f u_i + m_{ij}w_j\right) + \eta s_{ij}\frac{\partial w_j}{\partial t} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Здесь плотности, а также параметры m_{ij} и s_{ij} в правой части уравнений полагаются независящими от координат, что в общем случае для пористой среды неверно.

Для компактной записи соотношений (4) и уравнений (9) удобно перейти к шестимерному вектору смещений

$$U_i = \begin{cases} u_i, & i = 1, 2, 3; \\ w_{i-3}, & i = 4, 5, 6. \end{cases} \tag{10}$$

В случае однородной анизотропной среды Био уравнения (9) относительно компонент вектора (10) можно записать в виде [13]

$$C_{ij}^{kq}\frac{\partial^2 U_j}{\partial x_k \partial x_q} - G_{ij}\frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} - \eta D_{ij}\frac{\partial U_j}{\partial t} = 0, \quad (i = 1, ..., 6). \tag{11}$$

В (11) введена таблица упругих параметров C_{ij}^{kq}, элементы которой формируются по правилу

$$C_{ij}^{kq} = \begin{cases} C_{ik,qj}, & i, j, k, q = 1, 2, 3; \\ -Q_{ik}\delta_{j-3,q}, & i, k, q = 1, 2, 3;\ j = 4, 5, 6; \\ -Q_{jq}\delta_{i-3,k}, & i = 4, 5, 6;\ j, k, q = 1, 2, 3; \\ M\delta_{i-3,k}\delta_{j-3,q}, & i, j = 4, 5, 6;\ k, q = 1, 2, 3, \end{cases} \tag{12}$$

а также матрицы G и D вида

$$G = \begin{pmatrix} \rho I & \rho_f I \\ \rho_f I & \tilde{M} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} O & O \\ O & S \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где I и O — соответственно единичная и нулевая матрицы размерности 3×3; $\tilde{M} \equiv (m_{kq})$ — матрица тензора эффективных плотностей флюида; $S \equiv (s_{ij})$ — матрица тензора сопротивления течения флюида, обратная к матрице $K \equiv (\kappa_{mq})$ — тензора проницаемости среды.

Таблица C_{ij}^{kq} обладает симметрией $C_{ij}^{kq} = C_{ji}^{qk}$, а также дополнительными свойствами симметрии:

$$C_{ij}^{kq} b_k b_q = C_{ji}^{kq} b_k b_q, \quad C_{ij}^{kq} B_i B_j = C_{ij}^{qk} B_i B_j,$$

где b_k и B_i — составляющие соответственно трехмерного и шестимерного векторов.

В обозначениях (10), (12), (13) плотности энергии упругой деформации W и кинетической энергии E выражаются формулами

$$W = \frac{1}{2} C_{ij}^{kq} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial W_j}{\partial x_q}, \quad E = \frac{1}{2} G_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial t} \frac{\partial W_j}{\partial t}, \tag{14}$$

а соотношения между напряжениями и смещениями из (3), (4) перепишем следующим образом:

$$t_{ik} = C_{ij}^{kq} \frac{\partial U_j}{\partial x_q} \quad (i = 1, ..., 6;\ k = 1, 2, 3). \tag{15}$$

Здесь через t_{ik} обозначена прямоугольная таблица размера 6×3

$$t_{ik} \equiv \begin{cases} \tau_{ik}, & i, k = 1, 2, 3; \\ p\delta_{i-3,k}, & i = 4, 5, 6;\ k = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Наконец, используя таблицу t_{ik}, запишем вектор плотности потока энергии $\mathbf{P}$ с составляющими:

$$P_k = -t_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial t} = -C_{ij}^{kq} \frac{\partial U_j}{\partial x_q} \frac{\partial U_i}{\partial t} \quad (k = 1, 2, 3). \tag{16}$$

Уравнения Био (1956) для низкочастотной области. В ранней работе Био [2] уравнения пороупругости для случая однородной изотропной среды записывались относительно вектора смещений твердого каркаса $\mathbf{u}$ и вектора смещений жидкой фазы $\mathbf{U}$.

Напряжения, осредненные по объему, и смещения $\mathbf{u}$, $\mathbf{U}$, осредненные по своим фазам, связаны между собой соотношениями закона Гука [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{km}^{(s)} &= 2N e_{km}(\mathbf{u}) + (A \nabla \cdot \mathbf{u} + \tilde{Q} \nabla \cdot \mathbf{U}) \delta_{km} \quad (k, m = 1, 2, 3), \\ \sigma_{km}^{(f)} &= -\phi p \delta_{km} = (\tilde{Q} \nabla \cdot \mathbf{u} + R \nabla \cdot \mathbf{U}) \delta_{km}. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь $\sigma_{km}^{(s)}$ — элементы тензора напряжения твердой фазы; $\sigma^{(f)}$ — напряжение жидкой фазы, а параметры A, N (модуль сдвига упругого скелета), $\tilde{Q}$, R представляют собой упругие модули среды, которые выражаются через коэффициенты пористости ϕ, сжимаемости C_s, C_f и модуль объемного сжатия K.

Уравнения движения среды представляются в виде [2]

$$\begin{aligned} (A + N)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + N\Delta \mathbf{u} + \tilde{Q}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) &= \rho_{11}\mathbf{u}_{tt} + \rho_{12}\mathbf{U}_{tt} - b(\mathbf{u}_t - \mathbf{U}_t), \\ \tilde{Q}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + R\nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) &= \rho_{12}\mathbf{u}_{tt} + \rho_{22}\mathbf{U}_{tt} + b(\mathbf{u}_t - \mathbf{U}_t), \end{aligned} \tag{18}$$

где $\mathbf{u}_{tt} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$; $b = \frac{\eta}{\kappa}\phi^2$ (η — вязкость флюида, κ — проницаемость среды); ρ_{11}, ρ_{12}, ρ_{22} — эффективные плотности среды, определяемые равенствами

$$\rho_{11} = \rho_s(1 - \phi) + \rho_f \phi(\varrho - 1), \quad \rho_{12} = -\rho_f \phi(\varrho - 1), \quad \rho_{22} = \rho_f \phi \varrho, \tag{19}$$

в которых ρ_s и ρ_f — плотности упругого каркаса и флюида; ϕ — пористость; ϱ — коэффициент извилистости пор. Материальные параметры среды должны удовлетворять соотношениям

$$PR - \tilde{Q}^2 > 0, \quad (P = A + 2N), \; P > 0, \; R > 0, \quad \rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 > 0,$$

следующим из условий положительности квадратичных форм для энергии упругой деформации и кинетической энергии.

Уравнения Био (1962) для низкочастотной области. В терминах смещений $\mathbf{u}$ и $\mathbf{w}$ соотношения между полными напряжениями $\tau_{ij} = \sigma_{ij}^{(s)} + \sigma_{ij}^{(f)}$ и деформациями в изотропном случае можно выразить через коэффициенты Ламе осушенного каркаса μ, λ и коэффициенты $M = R/\phi^2$ и $\alpha = \frac{\tilde{Q}+R}{R}\phi$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\tau_{ij} = 2\mu e_{ij}(\mathbf{u}) + [(\lambda + \alpha^2 M)(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \alpha p]\delta_{ij} \quad (k, m = 1, 2, 3), \\ &\nabla \cdot \mathbf{w} = -(\frac{p}{M} + \alpha \nabla \cdot \mathbf{u}), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &\tau_{ij} = 2\mu e_{ij}(\mathbf{u}) + (\lambda_c \nabla \cdot \mathbf{u} + \alpha M \nabla \cdot \mathbf{w})\delta_{ij} \quad (k, m = 1, 2, 3), \\ &p = -(\alpha M \nabla \cdot \mathbf{u} + M \nabla \cdot \mathbf{w}). \end{aligned} \tag{20}$$

При этом эквивалентные системы (18) уравнения движения принимают вид [4, 5]

$$\begin{aligned} &(\lambda_c + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} + \alpha M \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}, \\ &\alpha M \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + M \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) = \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_m \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} + \frac{\eta}{\kappa}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь параметры λ_c, μ, α, M связаны с упругими модулями из (17) соотношениями $N = \mu$, $A = \lambda + (\alpha - \phi)^2 M$, $\tilde{Q} = \phi(\alpha - \phi)M$, $R = \phi^2 M$; $\rho = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s$ есть плотность пористого материала в целом, и $\rho_m = \rho_{22}/\phi^2 = (\phi\rho_f + \rho_a)/\phi^2 = \frac{\varrho\rho_f}{\phi}$ — эффективная плотность флюида. В низкочастотной области параметры η, κ и ρ_m не зависят от частоты.

Коэффициент μ — модуль сдвига объема пористого материала — равен модулю сдвига упругой матрицы (каркаса). Пусть K_s, K_f, K_m и K_c обозначают объемные модули сжимаемости зерен породы, флюида, упругой матрицы и насыщенной породы соответственно. Тогда упругие константы $H_c = \lambda_c + 2\mu$, αM и M можно представить следующим образом:

$$H_c = \lambda_c + 2\mu = K_c + \frac{4}{3}\mu, \quad K_c = K_s[(K_m + Q)/(K_s + Q)],$$

$$Q = K_f(K_s - K_m)/\phi(K_s - K_f)],$$

$$D \equiv \alpha M = K_s K_f (K_s - K_m)/[K_f(K_s - K_m) + K_s\phi(K_s - K_f)],$$

$$M \equiv \frac{1}{\beta} = K_s^2 K_f/[K_f(K_s - K_m) + K_s\phi(K_s - K_f)] = 1/[1/K_f + (\tilde{\alpha} - \phi)/K_s],$$

где

$$\alpha = 1 - K_m/K_s.$$

Отметим, что эти формулы справедливы только в случае изотропного и мономинерального каркаса. Если же каркас содержит зерна разных пород, например песка и глины, или построен из нескольких взаимопроникающих решеток, как, например, в случае пород в зоне мерзлоты или пород с газ-гидратом, необходимо использовать другие формулы, которые выводятся на основе подходов, развиваемых, например, в работах [14, 15].

Уравнения Санчес-Паленсия. Для анизотропной пористой среды уравнения представляют связное твердое тело, насыщенное слабовязким флюидом [6]:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= a^{(s)}_{ijkh} e_{kh}(\mathbf{u}) - \alpha_{ij} p \quad (i, j = 1, 2, 3), \\ -p &= \frac{1}{\beta}\alpha_{ij} e_{ij}(\mathbf{u}) + \frac{1}{\beta}\nabla\cdot\mathbf{w}, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} &= \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2, 3), \\ \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} &= \int\limits_0^t \hat{K}(t-\tau)(-\rho_f\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \nabla p)(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{23}$$

Здесь $a^{(s)}_{ijkh}$ — элементы тензора упругих коэффициентов осушенного твердого каркаса; α_{ij} — элементы тензора эффективного напряжения; $\frac{1}{\beta} \equiv M$, $\hat{K}(t)$ — некоторый оператор.

Уравнения (22)–(23) являются более общей формой уравнений пороупругости. Если $\hat{K}(t)$ =const, то от уравнений (23) легко перейти к представлениям в виде уравнений (21) или (18). Уравнения движения в форме, сходной с (23), возникают, например, в случае учета частотно-зависимой диссипации.

2. Частотно-зависимая диссипация. Некоторые модели механизмов диссипации

Большинство приложений теории Био в ранних иследованиях было связано с ультразвуковой областью, тогда как в низкочастотной области она использовалась редко, в основном из-за некорректного предсказания затухания продольных и поперечной волн и их дисперсии. В литературе 1980–1990 годов высказывалось мнение, что механизмы поглощения, введенные в рамках теории Био в работах [16–18], предсказывают эффекты распространения волн в искусственных синтетических средах, но не согласуются с описанием затухания и дисперсии волн в реальных флюидонасыщенных средах в области сейсмических частот. В области низких частот (10^0–10^3 Гц) теория Био дает более низкие значения затухания и дисперсии, чем экспериментально измеренные, на один или два порядка магнитуды [19].

Распространение волн через флюидонасыщенные породы вызывает малые макроскопические флюидные потоки. При распространении продольной волны через однородный пористый слой создается поток, перпендикулярный волновому фронту, из области сжатия в область дилатации. Вызываемое этим процессом затухание имеет максимум на релаксационной частоте ω_{vbl}, соответствующей состоянию, при котором на стенках пор начинают развиваться вязкие пограничные слои (инерциальные силы флюида в каждой поре становятся преобладающими относительно вязких сдвиговых сил). Модель относительных потоков [18] имеет вид

$$\omega_{vbl} = \frac{\eta}{\rho_f \kappa_0 F}, \tag{24}$$

где η — флюидная вязкость; ρ_f — плотность флюида; κ_0 — проницаемость; F — электрический формационный фактор. В интервале частот наземной сейсмики 10^0–10^2 Гц это затухание, известное как затухание «глобального потока» Био, в основном пренебрежимо мало.

На ранних этапах изучения возможных механизмов диссипации в пористых средах в литературе обсуждались несколько (эмпирических), отличных от Био, механизмов, которые могли бы вызвать дополнительное затухание в реальных средах. Один из них обусловлен, как свидетельствуют экспериментальные данные, присутствием глины в породе [20–22]. Предполагается, что прилипание глинистых частиц к стенкам пор увеличивает поверхность порового пространства и шероховатость стенок, что в свою очередь может усиливать вязкую диссипацию.

Более часто упоминается «локальный поток», связанный с образованием дополнительных (в масштабе размера зерен и микротрещин) локальных потоков флюида. Локальный флюидный поток, как механизм сейсмического волнового затухания, был предложен Mavko, A. Nur [23, 24] и изучался многими авторами [25–28]. Этот подход фокусируется на потерях, возникающих вследствие локального потока порового флюида в отдельной поре (или между двумя связанными порами) в процессе деформации, вызываемой прохождением волны. Когда, например, эллипсоидальная пора подвергается плоской деформации, ее форма изменяется, что является причиной некоторого флюидного движения внутри поры. Такой процесс не учитывается в классической теории Био, которая имеет дело только с макроскопическим (так называемым глобальным) потоком. Хотя влияние локального потока может вносить определенный вклад в упруго-волновое затухание, однако построение количественной модели этого феномена является сложной задачей, так как приходится иметь дело с индивидуальными порами, трещинами и характеризовать породу на уровне порового масштаба.

Другие модели механизмов поглощения, исследованные позднее, также связаны с идеей локальных потоков, но отличаются от упомянутой тем, что они полностью макроскопические и имеют дело в бóльшей мере с пространственным распределением макроскопических параметров локально-неоднородной пористой среды, нежели с параметрами отдельных пор и трещин.

В случае присутствия гетерогенности в масштабе пористой среды возможен дополнительный механизм затухания, который может привести к уже заметному затуханию и дисперсии в полосе частот наземной сейсмики и ВСП. В осадочном бассейне доминантным источником гетерогенности является слоистость осадков. Это впервые было понято и промоделировано в [29]. P-волна, у которой длина значительно более протяженная, чем толщины слоев, будет сжимать (или расширять) одновременно множество слоев. Так как каждый слой имеет в целом различные свойства сжимаемости, изменение флюидного давления в смежных слоях будет различным и посредством диффузии будет стремиться к равновесному (за счет вязких потоков). В контексте теории Био процесс флюидной диффузии известен как «медленная волна Био». Ее возникновение на изолированной границе раздела посредством модовой конверсии из падающей P-волны было впервые экспериментально обнаружено Plona [30] (см. также [31]).

Таким образом, когда длина волны больше, чем толщины слоев, можно говорить, что медленные волны возбуждаются, чтобы уравновесить возмущение флюидного давления между слоями. Диссипация в тонкослоистой модели обусловливается процессом генерации локальных потоков между слоями в результате прохождения быстрой продольной волны (т. е. механизмом дополнительного поглощения является конверсия быстрой продольной волны в диффузионные медленные волны, которые полностью затухают внутри слоев). Флюидный поток, связанный с этим уравновешиванием давления, может привести к значительному затуханию и дисперсии в сейсмической полосе частот. Такое индуцированное медленно-волновое затухание имеет максимум на релаксационной частоте ω_{sw}, соответствующей случаю, когда глубина скин-слоя, захваченного процессом диффузии флюидного давления (длина проникновения внутрь), составляет примерно порядок размера пористого континуума и согласно [32]

$$\omega_{sv} \approx \frac{K_f \kappa_0}{\eta \phi h^2},$$

где ϕ — характеристическая пористость слоистости (например, средняя пористость); K_f — флюидная несжимаемость; κ_0 — характеристическая проницаемость; h — характеристическая толщина слоя.

По этой тематике было выполнено много исследований. В частности, White и др. (Уайт Д. Ж. Э. Возбуждение и распространение сейсмических волн. М., 1986) моделировали низкочастотное равновесие флюидного давления между чередующимися газо- и жидконасыщенными слоями, в то же время пренебрегая всеми эффектами рассеивания. Авторы получили явное выражение для затухания и дисперсии P-волны, вызванные межслойными флюидными потоками. Norris [33] дал асимптотическую трактовку той же задачи, что позволило разъединить процесс диффузии флюидного давления (или медленной волны) от распространения (быстрой продольной) волны. Анализ требует, чтобы длина P-волны была много больше, чем характеристическая длина, на которой изменяются материальные свойства пористого пространства (и по которой определяются свойства эффективного материала). В рамках низкочастотного асимптотического предела Norris определил с точностью до главного порядка вклады в затухание и дисперсию продольной волны, вызываемые установлением равновесия флюидного давления между периодическими слоями. Он воспроизвел аналогичные результаты затухания и дисперсии White и др. [29] и таким образом дал обоснование более эвристической аппроксимации, используемой в работе White и др.

Б. Я. Гуревич и С. Л. Лопатников [34] расширили анализ, учитывая P-волновое распространение в случайных слоистых осадочных отложениях. Применение теории Био к неоднородным (случайным или периодически слоистым) пористым средам приводит к уравнениям Био с переменными коэффициентами. Из анализа этих уравнений при помощи техники статистического возмущения авторы вывели зависимости скорости и нормализованного затухания Q^{-1} быстрой продольной волны как функции частоты. Максимальные значения затухания и скоростной дисперсии достигаются на частоте

$\omega_0 = \frac{\kappa N}{\eta h^2}$, при которой длина медленной волны Био равна среднему размеру неоднородности (средней толщине слоя или характеристической длине). Их аналитические результаты для затухания и дисперсии, вызванные межслойными потоками, получены при сочетании следующих требований: вариации материальных свойств между разными слоями должны быть малы (аппроксимация типа однократного рассеивания); частоты должны быть достаточно малыми, чтобы все эффекты P-волнового рассеивания от отдельных слоев были бы пренебрежимо малы. Чтобы получить асимптотические результаты, необходимы предположения о корреляционной функции, характеризующей случайную слоистость. Когда авторы применили эту теорию к случаю периодического чередования слоев, то результаты оказались похожи на те, что были получены у Norris (1993) и White и др. [29] (результат ограничен только требованием периодичности слоев). В низкочастотном пределе Q^{-1} пропорционально $\omega^{1/2}$ в случае случайной и ω^1 в случае периодической слоистости. На частотах выше, чем ω_0, затухание убывает как $\omega^{-1/2}$, независимо от типа слоистости. Для более реалистичного случая слоистости с экспоненциальной функцией корреляции отмечается более постепенное изменение скорости и затухания с частотой, чем при периодической слоистости среды. Кривые затухания и дисперсии носят типично релаксационный характер.

Наконец, Gelinsky и Shapiro [35], Gelinsky и др. [36] расширили анализ P-волнового распространения в случайных слоистых средах до более высоких частот, при которых P-волновое рассеивание от границ разделов слоев трактуется в виде дополнительного медленно-волнового межслойного потока. Они получили аналитические результаты для случаев, в которых интегральная корреляционная функция соответствовала определенным типам случайной зависимости, и продемонстрировали, что их асимптотические результаты совпадают с результатами численного моделирования, полученными при использовании комплекса OASES, позволяющего вычислять волновые поля в слоистой среде.

В работе Б. Я. Гуревича, В. Б. Зырянова, С. Л. Лопатникова [37] на примере одномерной модели тонкослоистой (случайной с экспоненциальной функцией корреляции и периодической слоистости) пористой среды Био изучалось в широком частотном диапазоне раздельное и совместное влияние на затухание быстрой продольной волны трех механизмов: внутрислоистых флюидных потоков, индуцированных прохождением волны, рассеивания, вызванного тонкой слоистостью, и стандартного вязкоинерционного поглощения теории Био. Для модели случайной слоистости (в модели периодической слоистости рассеивание отсутствует) теоретические и численные результаты показали, что в сейсмической и звуковой частотной областях затухание, связанное с механизмами внутрислоистых потоков ($f_{flow} \approx 10^0 - 10^1$ Гц) и рассеивания ($f_{scat} \approx 10^2 - 10^3$ Гц), преобладает над затуханием Био; частотная зависимость поглощения механизма внутрислоистых потоков имеет более постепенный характер, чем для рассеивания или других известных механизмов затухания; осредненная частотная зависимость затухания, вызванная комбинированным влиянием трех механизмов, может быть выражена суперпозицией теоретических решений каждого из механизмов.

Модель тонкослоистой пористой среды отчасти подобна объединенной модели Био и потоков выдавливания («sqirt-flow») (BISQ-модель), предложенной Dvorkin, Nur [38–40] и обобщенной на случай анизотропии в работах Parra [41, 42]. В одномерной BISQ-модели используется цилиндрическая геометрия, которая, в отличие от плоскослоистой геометрии, имеет только один (в изотропном случае) свободный пространственный параметр — так называемую длину потока выдавливания, выбираемую таким образом, чтобы достигнуть совпадения между модельным и наблюдаемым затуханием.

В работах Parra [41, 42] рассмотрена анизотропная (трансверсально-изотропная) модель пористой среды Био, связанной с системой одинаково ориентированных флюидонасыщенных трещин, в которой описание потоков выдавливания осуществляется при помощи специального тензора.

Заметим, что характеристическая частота f_{sq} BISQ-модели располагается в области звуковых и ультразвуковых частот ($f_{sq} \approx 10^3 - 10^5$ Гц) и занимает промежуточное положение между f_{scat} и f_{biot} ($\approx 10^5 - 10^7$ Гц).

Обстоятельное численное исследование прохождения P-волн через тонкослоистую осадочную толщу дано в работе S. Pride, E. Tromeur, J. Berryman [32]. В этих исследованиях учитывается влияние на распространение P-волны частоты, угла падения, толщины слоев, проницаемости и упругой податливости пород. Результаты численного моделирования (при помощи метода рефлективити) согласуются с предшествующими теоретическими исследованиями: механизм уравновешивания флюидного давления между слоями может приводить к значительному затуханию на низких частотах. При помощи моделирования установлено, что при достаточно тонкой слоистости (1–10 см), медленноволновые эффекты максимальны в полосе частот наземной сейсмики (10^1–10^2 Гц). Увеличение толщины слоев до 1 м и более приводит к понижению $\omega_{sw}/2\pi$ до частоты менее 1 Гц.

Альтернативный подход учета частотно-зависимой диссипации заключается в построении эффективных вязкоупругих или вязкопороупругих моделей среды, которые могут вызывать эквивалентные эффекты поглощения и дисперсии.

Кроме затухания, связанного с трением движущейся в порах жидкости со стенками пор, в среде Био имеет место еще и затухание внутри обеих фаз. Для учета этого затухания модули, входящие в закон Гука, заменяются, как и в случае упругости, операторами, содержащими ядра релаксации или коэффициенты вязкости. Например, упругий коэффициент H_c (или другие модули) заменяется на оператор (общего вида)

$$H_c \to H_0 + \varkappa_n \frac{\partial}{\partial t} + \int\limits_0^t d\tau H_1(t-\tau)...,$$

где H_0 — упругая константа; $\varkappa_n$ — коэффициент вязкости твердой фазы; $H_1(t-\tau)$ — некоторое разностное ядро.

На дисперсионные соотношения для пористой среды сильно влияет присутствие вязкого граничного слоя в поровом флюидном потоке. В высокочастотном пределе ($\omega \to \infty$) результирующее поглощение пропорционально $\omega^{1/2}$.

Сходные дисперсионные законы были также выведены из диффузионной релаксации. В работе B. E. Рок, A. Hanyga [43] рассматривается эффективная модель, основанная на базе интегродифференциального волнового уравнения. При этом показано, что такое уравнение с ядром памяти $K_\alpha(t)$, соответствующим аппроксимации дисперсионного закона

$$k = 1/c_\infty \omega + i\lambda(-i\omega)^\alpha$$

(k — комплексное волновое число; c_∞ — высокочастотный предел скорости звука; λ — константа, зависящая от высоко- или низкочастотного предела скорости звука и от характеристического времени τ_R) со значением показателя $\alpha = 0.65$, хорошо согласуется с результатами Гуревича и Лопатникова [34] в широкой области частот, причём более высокочастотной, чем в [34].

В работе J. M. Carcione [44] различные механизмы диссипации вводятся в теорию Био посредством замены модуля взаимодействия между фазами (M) на зависящие от времени релаксационные функции, основанные на стандартной линейной модели твердого тела, и проводится сопоставление волнового пороупругого (двухфазного) численного моделирования с соответствующими вычислениями, основанными на однофазном моделировании для эффективной вязкоупругой среды. В работе показано, что однородную пористую среду можно промоделировать однофазной вязкоупругой средой. При этом для каждого вязкоупругого модуля достаточно только одного релаксационного механизма, чтобы получить соответствие с модулем пористой среды. Из-за того, что затухание в уравнениях Био не связано с упругой вязкоупругостью через соотношения между напряжениями и деформациями, стандартная модель вязкоупругости, которая обобщает сжимаемость и поперечный модуль релаксационными функциями, не соответствует описанию комплексных модулей Био. Поэтому при построении эквивалентных вязкоупругих уравнений движения автор непосредственно сопоставляет характеристики затухания и дисперсии скоростей волн путем подбора релаксационных функций, связанных с волновыми модами. Для каждой волновой моды подбирается свой релаксационный механизм, в котором релаксационные времена связаны с характеристическими частотами и показателями затухания Q.

3. Уравнения пороупругости с учетом частотно-зависимой диссипации

Уравнения Био в первом представлении. В ряде приложений, в которых учитывается частотно-зависимая диссипация (например, [45, 46]), уравнения движения (18) теории Био (1956) в частотной области при зависимости от времени вида $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}e^{i\omega t}$, $\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}}e^{i\omega t}$ представляются следующим образом:

$$\begin{aligned}&(A+N)\nabla(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}) + N\Delta\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{Q}\nabla(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{U}}) = -\omega^2\tilde{\rho}_{11}(\omega)\tilde{\mathbf{u}} - \omega^2\tilde{\rho}_{12}(\omega)\tilde{\mathbf{U}},\\ &\tilde{Q}\nabla(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}) + \tilde{R}\nabla(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{U}}) = -\omega^2\tilde{\rho}_{12}(\omega)\tilde{\mathbf{u}} - \omega^2\tilde{\rho}_{22}(\omega)\tilde{\mathbf{U}},\end{aligned} \tag{25}$$

где

$$\tilde{\rho}_{kk}(\omega) = \rho_{kk}(\omega) + \frac{i}{\omega}b(\omega), \quad k = 1,2, \quad \tilde{\rho}_{12}(\omega) = \rho_{12}(\omega) - \frac{i}{\omega}b(\omega); \tag{26}$$

$$\begin{aligned}&b(\omega) = \phi^2 H_1(\omega), \quad \rho_{22}(\omega) = \frac{\phi^2 H_2(\omega)}{\omega},\\ &\rho_{12}(\omega) = \phi\rho_f - \rho_{22}(\omega), \quad \rho_{QE}(\omega) = (1-\phi)\rho_s - \rho_{12}(\omega),\\ &H_1(\omega) + iH_2(\omega) = K^{-1}(\omega), \quad K(\omega) = \frac{i\phi}{\omega\rho_f}J_2\Big[i\tilde{a}\big(\frac{i\omega\rho_f}{\eta}\big)^{1/2}\Big]\Big/J_0\Big[i\tilde{a}\big(\frac{i\omega\rho_f}{\eta}\big)^{1/2}\Big].\end{aligned}$$

Здесь J_n — функция Бесселя; $\tilde{a}$ — характеристика порового размера, которая выводится из уравнения Дарси $b(\omega)|_{\omega\to 0} = \eta\phi^2/\kappa$, $\tilde{a} = 8\kappa/\phi^2$; κ — присущая материалу проницаемость. Формула для $K(\omega)$ получена при помощи метода гомогенизации для модели цилиндрической трубки, заполненной флюидом, путем решения уравнения Новье—Стокса в макроскопическом масштабе [47].

В работе Johnson и др. [19] в предположении, что решетка твердого материала является недеформируемой, функция динамической проницаемости предлагается в виде

$$K(\omega) = \frac{\kappa_0}{(1 - 4ia^2\kappa_0^2\rho_f\omega/\tilde{\eta}\Lambda^2\phi^2)^{1/2} - ia\kappa_0\rho_f\omega/\tilde{\eta}\phi},$$

где κ_0 — статическая Дарси-проницаемость; a — высокочастотный предел динамической извилистости; Λ — мера порового размера (если поровое пространство рассматривать в виде системы трубок, то $\Lambda \sim (8a\kappa_0/\phi)^{1/2}$; в случае трещин коэффициент 8 заменяется на 12). На низких частотах $K(\omega) \to \kappa_0$, на высоких — $K(\omega) \to i\eta\phi/(a\rho_f\omega)$.

Уравнения Био во втором представлении. Уравнения движения Био (1962) в частотной области запишем в виде

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \tilde{\tau} = -\omega^2\rho\tilde{\mathbf{u}} - \omega^2\rho_f\tilde{\mathbf{w}}, \\ &\nabla\tilde{p} = -\omega^2\rho_f\tilde{\mathbf{u}} - \omega^2 g(\omega)\tilde{\mathbf{w}} + i\omega b(\omega)\tilde{\mathbf{w}}. \end{aligned} \tag{27}$$

При использовании частотно-зависимой модели механизма диссипации Biot–Stoll, как это делается, например, в работе [48], функции $g(\omega)$ и $b(\omega)$ определяются формулами

$$g(\omega) = \frac{\rho_f}{\phi}\left(\varrho + \frac{F_i(\theta)}{\omega}\frac{\eta}{\kappa}\frac{\phi}{\rho_f}\right), \quad b(\omega) = \frac{\eta}{\kappa}F_r(\theta), \tag{28}$$

где комплексная функция $F(\theta) = F_r(\theta) + iF_i(\theta)$ представляется в виде

$$F(\theta) = \frac{1}{4}\cdot\frac{\theta T(\theta)}{1 + (2i/\theta)T(\theta)}, \quad \text{где} \quad T(\theta) = \frac{\mathrm{ber}'\theta + i\mathrm{bei}'\theta}{\mathrm{ber}\,\theta + i\mathrm{bei}\,\theta}, \quad \theta = a_p(\omega\rho_f/\eta)^{1/2}.$$

Здесь $\mathrm{ber}\,z$, $\mathrm{bei}\,z$ — функции Кельвина первого и нулевого порядка; $a_p = 2(A_o\kappa/\phi)^{1/2}$; A_o — константа Kozeny-Carman (~ 5);

$$\frac{b(\omega)}{\omega}\Big|_{\omega\to 0} \to \infty, \quad \frac{b(\omega)}{\omega}\Big|_{\omega\to\infty} \to 0, \quad g(\omega)\Big|_{\omega\to 0} \to (\varrho + 1/3)\rho_f/\phi, \quad g(\omega)\Big|_{\omega\to\infty} \to \varrho\rho_f/\phi.$$

Уравнения пороупругости во временно́й области с модифицированной фрикционной силой взаимодействия между каркасом и флюидом (D. L. Johnson [49]). Рассмотрим эти уравнения:

$$\rho\partial_t u^i + \rho_f\partial_t w^i - \partial_i\tau^{ij} = 0, \tag{29}$$

$$\rho_f\partial_t u^i + \frac{\alpha^i_{inf}\rho_f}{\phi}\partial_t w^i + \partial_i p + F^i_{fr} = 0, \tag{30}$$

$$\partial_t p = -\frac{1}{\beta}\partial_j w^j - \frac{1-\chi}{\beta}\partial_j u^j, \tag{31}$$

$$\partial_t\tau^{ij} = \Big[\frac{1-\chi}{\beta}\partial_j w^j + \Big(\lambda + \frac{(1-\chi)^2}{\beta}\Big)\partial_j u^j\Big]\delta^{ij} + 2G\cdot\frac{1}{2}(\partial_j u^i + \partial_i u^j). \tag{32}$$

Здесь u^i, w^i — i-компоненты скоростей векторов смещения в матрице и смещения флюида относительно матрицы ($w^i = \phi(v^i - u^i)$); τ — полный тензор напряжения насыщенной пористой среды; p — давление (возмущение стационарного значения давления) флюида; λ, G — коэффициенты Ламе для ненасыщенной флюидом матрицы («сухая матрица»), $\lambda = K - \frac{2}{3}G$, $K = \chi K_s$, $G = \chi_\mu \cdot \mu_s$, μ_s — модуль сдвига материала матрицы; β — коэффициент сжимаемости, определяемый при условиях флюидонасыщения,

$$\beta = \phi/K_f + \frac{1-\phi-\chi}{K_s},$$

где K_s, K_f — объемные модули сжимаемости материала матрицы и флюида; $\alpha = 1 - K/K_s$ — коэффициент эффективного напряжения, K — объемный модуль пористой матрицы; F^i_{fr} — i-компонента плотности фрикционной силы между матрицей и флюидом:

$$F^i_{fr} = \frac{\eta}{g^i_0} \int\limits_{-\infty\ or 0}^{t} \frac{\exp\left(-\frac{2}{M}\omega^i_b(t-\tau)\right)}{\sqrt{\pi\frac{2}{M}\omega^i_b(t-\tau)}} (\partial_\tau w^i + \frac{2\omega^i_b}{M} w^i) d\tau,$$

$\omega^i_b = \frac{\phi\eta}{\alpha^i_{inf}\cdot\rho_f\cdot\kappa^i_0}$ — i-компонента Био-частоты; η — вязкость флюида, κ^i_0 — предельное значение динамической проницаемости в i-м направлении при стремлении частоты к нулю. При $\omega \ll \omega^i_b$

$$F^i_{fr} = \frac{\eta}{\kappa^i_0} w^i + \frac{\alpha^i_{inf}\rho_f M}{4\phi} \partial_t w^i.$$

Если в уравнениях Био (29)–(30) перейти от скоростей смещений к обычным смещениям, то второе уравнение системы при условии $\omega \ll \omega^i_b$ будет иметь вид

$$-\partial_i p = \rho_f \partial_{tt} u_i + \frac{\alpha^i_{inf}\rho_f}{\phi}(1 + \frac{M}{4})\partial_{tt} w_i + \frac{\eta}{\kappa^i_0}\partial_t w_i.$$

Модифицированные уравнения Био в частотной области. В начале 1980-х годов на основе применения метода гомогенизации были получены модифицированные уравнения движения для среды Био [47], которые представляются в частотной области в виде системы четырех уравнений от переменных $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}\}$. Такие уравнения сразу получили признание и применение во многих теоретических и прикладных исследованиях (см., например, [41], [50–52]).

Рассмотрим переход от системы из шести уравнений движения к системе четырех уравнений. В качестве исходных удобно взять уравнения (22) и (23). Пусть зависимость от времени задается в виде $(-i\omega t)$. Тогда в частотной области аналоги уравнений (22) и (23) можно записать в виде

$$\tilde{\tau} = \tilde{C} \cdot \tilde{e}(\tilde{\mathbf{u}}) - \tilde{\alpha} p, \tag{33}$$

$$\sigma^{(f)}_{ij} = -\phi\tilde{p}\delta_{ij} = \frac{\phi}{\beta}[\tilde{\alpha}\tilde{e}(\tilde{\mathbf{u}}) + \phi\nabla\cdot(\tilde{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{u}})]\delta_{ij}, \tag{34}$$

$$\frac{\partial\tilde{\tau}_{ij}}{\partial x_j} = \nabla\cdot\tilde{\tau} = -\omega^2[\rho_s(1-\phi)\tilde{\mathbf{u}} + \phi\rho_f\tilde{\mathbf{U}}] \quad (i = 1, 2, 3), \tag{35}$$

$$\tilde{\mathbf{w}} = \phi(\tilde{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{u}}) = -\tilde{K}(\omega)(\omega^2\rho_f\tilde{\mathbf{u}} - \nabla\tilde{p})/(i\omega), \tag{36}$$

где $\tilde{\tau}$ — полный тензор напряжения насыщенной пористой среды; $\tilde{e}(\tilde{\mathbf{u}})$ — тензор деформации пористой среды; $\tilde{p}$ — давление флюида; $\tilde{C}$ — тензор упругих коэффициентов каркаса осушенной породы (в случае, например, трансверсально-изотропного каркаса он содержит пять независимых коэффициентов c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}); $\tilde{\alpha}$ — тензор второго ранга эффективного напряжения (при нулевом давлении). Элементы этого тензора в трансверсально-изотропном случае

$$\tilde{\alpha}_1 = 1 - (c_{11} + c_{12} + c_{13})/3K_s, \quad \tilde{\alpha}_3 = 1 - (2c_{13} + c_{33})/3K_s,$$

в изотропном случае $\tilde{\alpha} = 1 - K_m/K_s$, где K_s — объемный модуль зерен; K_m — объемный модуль зернистой пористой матрицы. Коэффициент сжимаемости β при условиях флюидонасыщения и в трансверсально-изотропом случае

$$\beta = \phi/K_f + (1-\phi)/K_s - [2(c_{11} + c_{12} + c_{13}) + c_{33}]/9K_s^2,$$
$$\phi/\beta = 1/\{1/K_f + [(2\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_3)/3 - \phi]/\phi K_s\},$$

в изотропном случае

$$\phi/\beta = 1/[1/K_f + (\tilde{\alpha} - \phi)/\phi K_s],$$

где K_f — объемный модуль флюида.

Пусть в (36) $\tilde{K}(\omega)$ — так называемый обобщенный Дарси-тензор,

$$\tilde{K}_l(\omega) = \frac{i\phi}{\omega\rho_f}\Big[\frac{\rho_a/\rho_f + \phi}{\phi} + \frac{i\omega_{cl}}{\omega}\Big]^{-1} = \frac{i}{\omega}\Big[\rho_{m_l} + \frac{i}{\omega}\frac{\eta}{\kappa_l}\Big]^{-1},$$

где $\frac{\omega_{cl}}{\omega} = \frac{\eta\phi}{\kappa_l\rho_f\omega}$, $l = 1,2,3$; κ_l — присущая проницаемость среды; ρ_a — дополнительная плотность, введенная в [2, 4] и связанная с эффективными плотностями из (21) и (18) посредством формулы $\rho_m = \rho_{22}/\phi^2 = (\phi\rho_f + \rho_a)/\phi^2$.

Переход в (35), (36) к независимым переменным $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}\}$ вместо $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{U}}\}$ или $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}}\}$ осуществляется следующим образом. Вычисляется дивергенция от обеих частей уравнения (36) и используется выражение для $\tilde{p}$ из (34): $\operatorname{div}\tilde{\mathbf{w}} = -(\beta\tilde{p} + \tilde{\alpha}\tilde{e}(\tilde{\mathbf{u}}))$. В результате в изотропном случае получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}&(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}) + \mu\Delta\tilde{\mathbf{u}} + \omega^2\hat{\rho}\tilde{\mathbf{u}} - \hat{\alpha}\nabla\tilde{p} = 0,\\ &\frac{\tilde{K}(\omega)}{(i\omega)}\Delta\tilde{p} - \beta\tilde{p} - \hat{\alpha}(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}) = 0,\end{aligned} \tag{37}$$

где

$$\hat{\rho} = \rho + \rho_f^2\omega^2\frac{\tilde{K}(\omega)}{(i\omega)}, \quad \hat{\alpha} = \tilde{\alpha} + \rho_f^2\omega^2\frac{\tilde{K}(\omega)}{(i\omega)}, \quad \tilde{\alpha} = 1 - \frac{K_b}{K_s}, \quad \beta = \frac{\tilde{\alpha}-\phi}{K_s} + \frac{\phi}{K_f},$$

$K_b = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ — объемная сжимаемость; K_s — сжимаемость зерен матрицы; K_f — сжимаемость флюида; $\tilde{K}(\omega)$ — комплексная функция проницаемости (обобщенный Дарси-коэффициент) — аналог $\frac{\kappa}{\eta}$. $\tilde{K}^{-1}(\omega) = H_1(\omega) + iH_2(\omega)$. Введем параметры характеристической частоты $\omega_c = \frac{\phi}{\rho_f}H_1(0)$ и извилистости $\varrho = \frac{\phi}{\omega\rho_f}H_2(0)$. Тогда приведенные комплексные параметры $\hat{\rho}$, $\hat{\alpha}$, $\tilde{K}(\omega)$ в терминах ω_c, ϱ запишем в виде

$$\frac{\hat{\rho}}{\rho} = \left[1 - \frac{\rho_f^2}{\rho}\frac{\phi\omega^2\varrho}{\omega_c^2 + (\omega\varrho)^2}\right] - i\frac{\rho_f}{\rho}\frac{\phi\omega\omega_c}{\omega_c^2 + (\omega\varrho)^2},$$

$$\frac{\hat{\alpha}}{\tilde{\alpha}} = \left[1 - \frac{1}{\tilde{\alpha}} \frac{\phi\omega^2\varrho}{\omega_c^2 + (\omega\varrho)^2}\right] - i\frac{1}{\tilde{\alpha}} \frac{\phi\omega\omega_c}{\omega_c^2 + (\omega\varrho)^2},$$

$$\omega^2 \frac{\tilde{K}(\omega)}{(i\omega)} = \frac{-i\frac{\phi}{\rho_f}\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + i\frac{\omega\varrho}{\omega_c}}.$$

Уравнения с BISQ-моделью диссипации. Dvorkin и Nur (1993 [38]) на примере одноаксиального распространения продольной волны вывели систему уравнений, в которой осуществлен совместный учет вязкой диссипации (Био-механизма) потока флюида в направлении перемещения и дополнительных двумерных потоков выдавливания (squirt-flow), возбуждаемых в поперечных направлениях.

Позднее Para в работе [41] сделал обобщение уравнений из [38] на случай распространения волн в трансверсально-изотропной пористой среде. Окончательные уравнения записываются в частотной области в форме системы модифицированных уравнений. Фактически совместный учет Biot- и squirt-flow-механизмов диссипации сводится к введению в уравнение (34) специального squirt-flow-тензора $\tilde{S}(\omega)$. В случае трансверсально-изотропной среды предполагается, что тензоры $\tilde{K}(\omega)$, $\tilde{C}$, $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{S}(\omega)$ заданы в системе координат, связанной с осью симметрии среды. Тензор $\tilde{S}(\omega)$ в [41]

$$\tilde{S}(\omega) = \begin{pmatrix} s_3(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & s_1(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & s_1(\omega) \end{pmatrix},$$

где элементы $s_m(\omega)$ выражаются формулами

$$s_m(\omega) = 1 - \frac{2J_1(\gamma_m R_m)}{\gamma_m R_m J_0(\gamma_m R_m)}, \quad \gamma_m^2 = \frac{\omega\rho_f\beta}{\phi}[\frac{\rho_a/\rho_f + \phi}{\phi} + \frac{i\omega_m}{\omega}], \quad (m = 1, 2, 3).$$

Здесь J_o и J_1 — функции Бесселя; R_m — характеристическая длина squirt-потока. Для используемого на практике сейсмического диапазона частот выполняется условие $\frac{\omega_m}{\omega} = \frac{\eta\phi}{k_m\rho_f\omega} \geq 1$.

Вместо уравнения (34) модифицированное выражение для полного давления, включающее механизмы Био и потоков выдавливания (squirt-flow), в случае трансверсально-изотропной среды предлагается записать в виде

$$\tilde{p} = -\frac{\phi}{\beta}s_1(\omega)\left[\frac{\partial\tilde{U}_z}{\partial z} + \frac{\alpha_3 - \phi}{\phi}\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial z}\right] - \frac{\phi}{\beta}s_3(\omega)\left[\frac{\partial\tilde{U}_y}{\partial y} + \frac{\alpha_1 - \phi}{\phi}\frac{\partial\tilde{u}_y}{\partial y}\right] -$$

$$-\frac{\phi}{\beta}s_3(\omega)\left[\frac{\partial\tilde{U}_x}{\partial x} + \frac{\alpha_1 - \phi}{\phi}\frac{\partial\tilde{u}_x}{\partial x}\right]$$

или в терминах $\tilde{\mathbf{w}} = \phi(\tilde{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{u}})$:

$$\tilde{p} = -\frac{1}{\beta}\left[s_3(\omega)\nabla\cdot\tilde{\mathbf{w}} + (s_1(\omega) - s_3(\omega))\frac{\partial\tilde{w}_z}{\partial z}\right] -$$

$$-\frac{1}{\beta}\left[s_3(\omega)\alpha_1\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}} + (s_1(\omega)\alpha_3 - s_3(\omega)\alpha_1)\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial z}\right]. \quad (38)$$

В изотропном случае эти формулы имеют вид

$$\tilde{p} = -\frac{\phi}{\beta}s(\omega)[\nabla\cdot\tilde{\mathbf{U}} + \frac{\alpha_1-\phi}{\phi}\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}], \quad \tilde{p} = -\frac{1}{\tilde{\beta}}s(\omega)[\nabla\cdot\tilde{\mathbf{w}} + \alpha\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}].$$

Здесь $\phi/\tilde{\beta} = 1/[1/K_f + (\alpha-\phi)/\phi K_s]$.

Новое соотношение для $\tilde{p}$ и смещения $\tilde{\mathbf{u}}$ конструируется из уравнения Дарси (34) и равенства (38):

$$s_3\tilde{k}_1\nabla^2\tilde{p} - \beta\tilde{p} + (s_1\tilde{k}_3 - s_3\tilde{k}_1)\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial z^2} - s_3\tilde{\alpha}_1\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}} - (s_1\tilde{\alpha}_3 - s_3\tilde{\alpha}_1)\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \tag{39}$$

где $\tilde{k}_m = -\frac{k_m(\omega)}{i\omega}$, $\tilde{\alpha}_m = \alpha_m + \omega^2\rho_f\tilde{k}_m$. Исключая в (33), (35), (36) смещение $\tilde{\mathbf{U}}$ и используя (39), получим систему уравнений относительно $\tilde{\mathbf{u}}$ и $\tilde{p}$:

$$\begin{aligned}
&[c_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2\tilde{\rho}_x]\tilde{u}_x + (c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2\tilde{u}_z}{\partial x\partial z} - \tilde{\alpha}_x\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x} = 0,\\
&(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2\tilde{u}_x}{\partial x\partial z} + [c_{44}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2\tilde{\rho}_z]\tilde{u}_z - \tilde{\alpha}_z\frac{\partial\tilde{p}}{\partial z} = 0,\\
&-s_3\tilde{\alpha}_x\frac{\partial\tilde{u}_x}{\partial x} - s_1\tilde{\alpha}_z\frac{\partial\tilde{u}_z}{\partial z} + (s_3k_x\frac{\partial^2}{\partial x^2} + s_1k_z\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \beta)\tilde{p} = 0,
\end{aligned} \tag{40}$$

где $\tilde{\rho}_m = \rho + \omega^2\rho_f k_m$. Отдельное несвязанное уравнение для u_y

$$[c_{66}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + c_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2\tilde{\rho}_x]\tilde{u}_y = 0 \tag{41}$$

относится к SH-волне.

Рассмотрим теперь представление уравнений с BISQ-моделью диссипации [38], [41] во временно́й области.

За основу возьмем уравнения Био (1962) для однородной изотропной среды:

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij}(\mathbf{u}) + [\lambda(\nabla\cdot\mathbf{u}) - \alpha p]\delta_{ij} \quad (i,j=1,2,3), \tag{42}$$

$$-p = \frac{\alpha}{\beta}(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \frac{1}{\beta}(\nabla\cdot\mathbf{w}), \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j} = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_f\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2},\\
&-\frac{\partial\nabla_i p}{\partial x_i} = \rho_f\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_m\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + \frac{\eta}{\kappa}\frac{\partial w_i}{\partial t} \quad (i=1,2,3).
\end{aligned} \tag{44}$$

Согласно [38] и [41], а также учитывая механизм потоков выдавливания, равенство (43) в частотной области запишем в виде

$$-\tilde{p} = s(\omega)\Big[\frac{\alpha}{\beta}(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{u}}) + \frac{1}{\beta}(\nabla\cdot\tilde{\mathbf{w}})\Big], \tag{45}$$

где

$$s(\omega) = 1 - \frac{2J_1(\gamma R)}{\gamma R J_0(\gamma R)}, \quad \gamma^2 = \beta(\omega^2 m + i\omega\frac{\eta}{\kappa}). \tag{46}$$

Во временно́й области система (42)–(43) при учете (45) принимает вид интегродифференциальных уравнений:

$$-p = \frac{1}{\beta}\int\limits_0^t S(t-\tau)[\alpha(\nabla\cdot\mathbf{u}) + (\nabla\cdot\mathbf{w})](\tau)d\tau, \tag{47}$$

$$\tau_{ij} = 2\mu e_{ij}(\mathbf{u}) + \left\{\lambda(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \frac{\alpha}{\beta}\int\limits_0^t S(t-\tau)[\alpha(\nabla\cdot\mathbf{u}) + (\nabla\cdot\mathbf{w})](\tau)d\tau\right\}\delta_{ij}, \quad i,j = 1,2,3,$$

а уравнения движения (45) заменяются на следующие:

$$(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u} + \frac{\alpha}{\beta}\int\limits_0^t S(t-\tau)[\alpha\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{w})](\tau)d\tau = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_f\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{\beta}\int\limits_0^t S(t-\tau)[\alpha\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{w})](\tau)d\tau = \rho_f\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_m\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + \frac{\eta}{k}\frac{\partial w_i}{\partial t}. \tag{48}$$

Введем псевдодифференциальный оператор (ПДО) $\hat{S} = \hat{S}(i\frac{\partial}{\partial t})$, действие которого на финитную функцию $f(t, x_k)$ определим формулами

$$\hat{S}f(t,x_k) = (2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(t-\tau)f(\tau,x_k)d\tau, \quad S(t) = (2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}s(\omega)d\omega.$$

Здесь функция $s(\omega)$ — символ оператора $\hat{S}$ — задается посредством формулы (46). С использованием ПДО система (48) примет вид

$$\mu\Delta\mathbf{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \frac{\alpha}{\beta}\hat{S}[\alpha\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{w})] = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_f\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{\beta}\hat{S}[\alpha\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{w})] = \rho_f\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_m\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + \frac{\eta}{k}\frac{\partial w_i}{\partial t}. \tag{49}$$

Запишем (46) как

$$s(\omega) = 1 - \tilde{s}(\omega), \quad \tilde{s}(\omega) = \frac{2J_1(\xi)}{\xi J_0(\xi)}, \quad \xi = \gamma R. \tag{50}$$

Тогда уравнения (49) перепишем в виде

$$\mu\Delta\mathbf{u} + [(\lambda_c+\mu) - \frac{\alpha^2}{\beta}\hat{s}]\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \frac{\alpha}{\beta}[1-\hat{s}]\nabla(\nabla\cdot\mathbf{w})] = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_f\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2},$$

$$\frac{\alpha}{\beta}[1-\hat{s}]\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) + \frac{1}{\beta}[1-\hat{s}]\nabla(\nabla\cdot\mathbf{w})] = \rho_f\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_m\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + \frac{\eta}{k}\frac{\partial w_i}{\partial t}. \tag{51}$$

Здесь $\lambda_c = \lambda + \frac{\alpha^2}{\beta}$, через $\hat{s}$ обозначен ПДО, имеющий символом функцию $\tilde{s}(\omega)$ из (50).

Как показано в [38], для сейсмических частот, используемых на практике, должно выполняться условие $\frac{\omega_c}{\omega} \gg 1$, поэтому для аргумента функций Бесселя в (50) допустима аппроксимация

$$\xi = \gamma R \approx \sqrt{i\omega\beta\frac{\eta}{k}R^2} \approx \sqrt{i\omega}C_o, \quad C_o = R\sqrt{\beta\eta/k}.$$

В заключение приведем полезный пример обоснованного определения всех необходимых параметров уравнений Био при построении физической модели флюидонасыщенной осадочной толщи [32].

За основу примем уравнения Био для изотропной однородной среды:

$$\tilde{\tau} = [(H - 4/3G)\nabla \cdot \mathbf{u} + C\nabla \cdot \mathbf{w}]\mathbf{I} + G[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^\top - 2/3\nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{I}], \tag{52}$$

$$-\tilde{p} = C\nabla \cdot \mathbf{u} + M\nabla \cdot \mathbf{w}. \tag{53}$$

$$\nabla \cdot \tilde{\tau} = -\omega^2(\rho\tilde{\mathbf{u}} + \rho_f\tilde{\mathbf{w}}), \tag{54}$$

$$-\nabla\tilde{p} = -\omega^2\rho_f\tilde{\mathbf{u}} - i\omega\frac{\eta}{K(\omega)}\tilde{\mathbf{w}}. \tag{55}$$

Три упругих модуля Био (1962) $(H-4/3G)$, C, M можно выразить через три других коэффициента, которые имеют ясные лабораторные определения: 1) объемный модуль неосушенной пористой породы K_U, контролирующий объемные изменения герметически закрытого образца породы; 2) объемный модуль осушенной пористой породы K_D, контролирующий объемные изменения образца, если флюидное давление не изменяется; 3) коэффициент B, который есть отношение между приращениями флюидного давления и прикладываемого ограничивающего давления в герметически закрытом образце. Эти в основном обоснованные соотношения суть

$$H - 4/3G = K_U, \quad C = BK_U, \quad M = \frac{B^2}{1 - K_D/K_U}K_U,$$

не зависящие от возможного присутствия анизотропии в образце или в масштабе зерен, а также от того, имеют ли зерна, составляющие породу, разный минералогический состав. Модуль G $(\equiv \mu)$ — модуль сдвига образца — применяется как независящее от флюида свойство породы.

Отметим, что взяв дивергенцию уравнения (55) и подставив равенства (53), получим уравнение диффузии флюидного давления: $D_p\nabla^2 p + i\omega p =$ члены источника, где $D_p = M\kappa/\eta$ — коэффициент диффузии флюидного давления. Он определяет физическую роль, которую играет M.

Далее налагаются ограничения на то, чтобы зерна в каждом образце породы были изотропными и однородными. При таких мономинеральных ограничениях (и только при таких условиях) соотношения Biot и Willis (1957 [3]) будут справедливы. Эти соотношения дают явные зависимости модулей пористого материала от объемных модулей K_f и K_s порового флюида и твердых зерен:

$$B = \frac{1/K_D - 1/K_s}{1/K_D - 1/K_s + (1/K_f - 1/K_s)},$$

$$K_U = \frac{K_D}{1 - B(1 - K_D/K_s}.$$

После некоторых преобразований имеем следующие представления для модулей:

$$K_U = \frac{K_d + [1 - (1-\phi)K_D/K_s]K_f\phi}{1+\Delta},$$

$$C = \frac{(1 - K_D/K_s)K_f\phi}{1+\Delta}, \quad M = \frac{K_f\phi}{1+\Delta},$$

где

$$\Delta = \frac{1-\phi}{\phi}\frac{K_f}{K_s}\Big(1 - \frac{K_D}{(1-\phi)K_s}\Big).$$

Запись пороупругих модулей в таком виде рациональна, поскольку Δ всегда очень малое число. В экстремальном пределе жесткой решетки, где $K_D \to (1-\phi)K_s$, получим $\Delta \to 0$. Противоположный предел бесконечно податливой решетки ($K_D \to 0$) имеем, когда зерна не формируют никаких протяженных соединенных проходов через образец. В осадках такой порог просачивания встречается при определенном значении $\phi \approx 0.5$, зависящем от особенностей распределения размера зерен и конфигурации заполнения. Таким образом, Δ принимает свое наибольшее значение K_f/K_s, когда имеется бесконечная податливость решетки и Δ никогда не располагается вне области $0 < \Delta < K_f/K_s$ при любых типах материалов. Это означает, в частности, что модуль M ограничен так, что $1/(1+K_f/K_s) < \phi M/K_f < 1$. Так как $K_f/K_s \approx 10^{-1}$, когда флюид — жидкость, коэффициент диффузии давления хорошо аппроксимируется как $D_p \approx K_f\kappa/(\eta\phi)$.

Осушенные модули являются определенными функциями микрогеометрии образца, и не существует никаких универсальных законов, которые бы связывали их с пористостью. Тем не менее в низкопористых материалах осушенные модули больше, чем в высокопористых, и поэтому предполагается, что при изменяющихся с литологией a и b целесообразно использовать простое правило:

$$K_D = K_s\frac{1-\phi}{1+a\phi}, \quad G = G_s\frac{1-\phi}{1+b\phi}.$$

Здесь G_s — модуль сдвига зерен пористого материала.

Теория эффективных сред (например, [16], [53]) дает выражения того же вида и предполагает, что a и b зависят от формы предполагаемых пор и отношения K_s/G_s. Предполагается, что K_s/G_s есть константа для всех пород (это действительно так для большинства зерен песка). В зависимости от степени консолидации допустима приблизительно область $2 < a,\ b < 20$ для песчаников (2 характерно для хорошо консолидированных и 20 для плохо консолидированных пород). При этих предположениях тремя параметрами, фиксирующими упругие свойства, являются ϕ, a, b. Чтобы уменьшить число свободных параметров, примем произвольно $b = 3/2a$ во всех модельных построениях (теория эффективной среды предсказывает $b > a$, и поэтому множитель $3/2$ является приемлемым для консолидированных осадков).

Последним материальным свойством модели является динамическая проницаемость $K(\omega)$. Используем упомянутый раньше результат Johnson и др. (1987):

$$\frac{K(\omega)}{\kappa_0} = \left[\sqrt{1 - i\frac{\omega}{\omega_{vbl}}\frac{4}{n}} - i\frac{\omega}{\omega_{vbl}}\right]^{-1},$$

где κ_0 — статическая Дарси-проницаемость материала; ω_{vbl} — переходная частота, определяемая формулой (24); n — безразмерный параметр, который зависит только от выражений поровой геометрии

$$n = \frac{\Lambda^2}{F\kappa_0}.$$

Здесь F снова электрический формационный фактор, а Λ — отношение взвешенного порового объема к площади поверхности зерен с весом, выделяющим стянутую часть соединяющегося порового пространства. Имеются некоторые данные, предполагающие, что $n \approx 8$ для относительно глинистых песчаников и осадков. Однако в породах с вторичным приростом глины n, вероятно, понижается ниже этого значения. Другими словами, n не следует в целом рассматривать, как универсальную константу. Тем не менее, чтобы уменьшить число свободных параметров, примем $n = 8$ для всех осадочных моделей. Наконец, статическую Дарси-проницаемость κ_0 определим с использованием модели (Thompson и др. [54]): $\kappa_0 = \frac{l^2}{226F}$, в которой формационный фактор F задан законом $F = \phi^{-m}$, где показатель m для осадочных пород обычно лежит в интервале $1.5 < m < 2.2$ с вариациями, вызываемыми различиями в микрогеометрии породы. Для того чтобы устранить еще один свободный параметр, возьмем $m = 1.7$ для всех осадков. Thompson и др. [54] измерили l для 50 образцов песчаников и установили, что все значения l лежат в интервале $0.3\,\mu m < l < 90\,\mu m$ с вариацией, зависящей от степени вторичного глинистого обогащения и первоначального выветривания зерен. Этот интервал по l в сочетании с вариациями по F соответствует более чем семи порядкам магнитуды вариации проницаемости. Таким образом, осадочные последовательности можно определять фиксацией трех физических свойств: ϕ (пористости), a (фактора податливости) и l (порового диаметра) для каждого слоя последовательности.

Приведем таблицу единиц измерения величин (СИ), входящих в уравнения Био:

- напряжение и давление $\sigma = E\varepsilon$, упругие коэффициенты — модули E, $1\ \text{Па} = \frac{Н}{\text{м}^2} = 10 \cdot \frac{\text{г}}{\text{см}\cdot\text{с}^2}$, $1\ \text{ГПа} = 10^9\ \text{Па} = 10^{10} \cdot \frac{\text{г}}{\text{см}\cdot\text{с}^2}$;
- порядок реальных значений упругих модулей: $(10^0 - 10^1)$ ГПа;
- вязкость: $1\ \text{Па}\cdot\text{с} = \frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}}$, 1 пуаз (П) $= 10^{-1}\frac{\text{кг}}{\text{м}\cdot\text{с}} = 1 \cdot \frac{\text{г}}{\text{см}\cdot\text{с}}$;
- порядок реальных значений вязкости: $(10^0 - 10^1)\cdot 10^{-3}$ П;
- плотность: $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$;
- проницаемость: 1 дарси (Д) $= 10^{-6}\ \text{мм}^2 = 10^{-8}\ \text{см}^2 = 10^{-12}\ \text{м}^2$; 1 миллидарси (мД) $= 10^{-3}$ Д $= 10^{-11}\ \text{см}^2 = 10^{-15}\ \text{м}^2$;
- порядок реальных значений проницаемости: $(10^{-1} - 10^2)\cdot 10^{-8}\ \text{см}^2$.

Указатель литературы

1. *Френкель Я. И.* К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. география и геофизика. 1944. Т. 8, №4. С. 133–150.
2. *Biot M. A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated Porous Solid I. // J. Acoust. Soc. Amer. 1956. Vol. 28. P. 168–178.
3. *Biot M. A., Willis D. C.* The elastic coefficients of the theory of consolidation // J. Appl. Mech. 1957. Vol. 24. P. 594–601.
4. *Biot M. A.* Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media // J. Appl. Phys. 1962. Vol. 33, N 4. P. 1482–1498.
5. *Biot M. A.* Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media // J. Acoust. Soc. Amer. 1962. Vol. 34, N 9. P. 1254–1264.

6. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
7. *Burridge R., Keller J.* Poroelasticity equations derived from microstructure // J. Acoust. Soc. Amer. 1981. Vol. 70. P. 1140–1146.
8. *Николаевский В. Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. М., 1984. 232 с.
9. *Berryman J. G., Thigpen L.* Linear dynamic poroelasticity with microstructure for partially saturated solids // J. Appl. Mech. 1985. Vol. 52. P. 345–350.
10. *Whitaker S.* 1) Flow in porous media. I. A technical derivation of Darcy's law // Transport in Porous Media. 1986. Vol. 1. P. 3–25; 2) Flow in porous media. II. The governing equations for immiscible, two-phase flow // Transport in Porous Media. 1986. Vol. 1. P. 105–125; 3) Flow in porous media. III. Deformable media // Transport in Porous Media. 1986. Vol. 1. P. 127–154.
11. *Pride S. R., Gangi A. F., Morgan F. D.* Deriving the equations of motion for porous isotropic media // J. Acoust. Soc. Am. 1992. N 6. P. 3278–3290.
12. *Молотков Л. А.* Исследования распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. СПб.: Наука, 2001. 347 с.
13. *Ковтун А. А., Решетников В. В.* Распространение объемных волн в лучевом приближении в однородных анизотропных упругопористых насыщенных средах // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 1996. Сер. 4, вып. 4. С. 18–27.
14. *Berryman J.G., Milton G.W.* Exact results for generalized Gassmann's equations in composite porous media with two consistituents // Geophysics. 1991. Vol. 56, N 12. P. 1950–1960.
15. *Carcione J. M., Helle H. B., Santos J. E., Ravazzoli C. L.* A constitutive equation and generalized Gassmann modulus for multimineral porous media // Geophysics. 2005. Vol. 70, N 2. P. N17–N26.
16. *Berryman J. G.* Confirmation of Biot's theory // Appl. Phys. Lett. 1980. Vol. 37. P. 382–384.
17. *Johnson D. L., Plona T. J.* Acoustic slow waves and the consolidation transition // J. Acoust. Soc. Amer. 1982. Vol. 72. P. 556–565.
18. *Johnson D. L., Koplik J., Dashen R.* Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media // Fluid Mech. 1987. Vol. 176. P. 379–402.
19. *Kelder O., Smeulders D. M. J.* Observation of the Biot slow wave in water-saturated Nivelsteiner sandston // Geophysics. 1997. Vol. 62, N 6. P. 1794–1796.
20. *Klimentos T., Mc Cann C.* Way is the Biot slow compressional wave not observed in real rocks // Geophysics. 1988. Vol. 53. P. 1605–1609.
21. *Klimentos T.* The effects of porosity-permeability-clay content on the velocity of compressional waves // Geophysics. 1991. Vol. 56, N 12. P. 1930–1939.
22. *Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А.* Механика пористых насыщенных сред. М.: Недра, 1970. 335 с.
23. *Mavko G., Nur A.* Melt Squirt in Aesthenosphere // J. Geophys. Res. 1975. Vol. 80. P. 1444–1448.
24. *Mavko G., Nur A.* Attenuation in partially saturated rocks // Geophysics. 1979. Vol. 44. P. 161–178.
25. *O'Connel R. J., Budiansky B.* Viscoelastic properties of fluid-saturated cracked solids // J. Geophys. Res. 1977. Vol. 82. P. 5719–5735.
26. *Jones T.* Pore fluids and frequency dependent wave propagation in rocks // Geophysics. 1986. Vol. 51. P. 1939–1953.
27. *Murphy W. F., Winkler K. W., Kleinberg R. L.* Acoustic relaxation in sedimentary rocks: Dependence on grain contacts and fluid saturation // Geophysics. 1986. Vol. 51. P. 757–766.
28. *Уайт Дж. Э., Михайлова Н. Г., Ляховицкий Ф. М.* Низкочастотные сейсмические волны в флюидонасыщенных слоистых породах // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1975. Т. 11, № 10. С. 654–659.
29. *Plona T.* Observation of a Second Bulk Compressional Wave in a Porous Medium at Ultrasonic Frequencies // Appl. Phys. Lett. 1980. Vol. 36. P. 259–261.
30. *Chin R. C. Y., Berryman J. G., Hedstrom G. W.* Generalized ray expansion for pulse propagation and attenuation in fluid-saturated porous media // Wave motion. 1985. Vol. 7. P. 43–65.

31. *Pride S., Tromeur E., Berryman J.* Biot slow-wave effects in stratifaed rock // Geophysics. 2002. Vol. 67. P. 271–281.
32. *Norris A N.* Low-frequency Dispersion and Attenuation in Partially Saturated Rocks // J. Acoust. Soc. Am. 1993. Vol. 94. P. 359–370.
33. *Gurevich B., Lopatnikov S. L.* Velocity and attenuation of elastic waves in finely layered porous rocks // Geophys. J. Internat. 1995. Vol. 121. P. 933–947.
34. *Gelinsky S., Shapiro S. A.* Poroelastic Backus averaging for anisotropic layered fluid- and gas-saturated sediments. // Geophysics. 1997. Vol. 62, N 6. P. 1867–1878.
35. *Gelinsky S., Shapiro S. A., Muller T., Gurevich B.* Dynamic poroelasticity of thinly layered structures // Int. J. Structures. 1998. Vol. 35. P. 4739–4751.
36. *Gurevich B., Zyrianov V. B., Lopatnikov S. L.* Seismic attenuation in finely layered porous rocks: Effects of fluid flow and scattering // Geophysics. 1997. Vol. 62, N 1. P. 310–324.
37. *Dvorkin J., Nur A.* Dynamic poroelasticity: A unified model with the squirt and the Biot mechanisms // Geophysics. 1993. Vol. 58. P. 524–533.
38. *Dvorkin J., Nolen-Hoeksema K., Nur A.* The squirt-flow mechanism: Macroscopic description // Geophysics. 1994. Vol. 59. P. 428–438.
39. *Dvorkin J., Mavko G., Nur A.* Squirt flow in fully saturated rocks // Geophysics. 1995. Vol. 60. P. 97–107.
40. *Parra J. O.* The transversely isiotropic poroelastic wave equation including the Biot and the squirt mechanisms: Theory and application // Geophysics. 1997. Vol. 62, N 1. P. 309–318.
41. *Parra J. O.* Poroelastic model to relate seismic wave attenuation and dispersion to permebeality anisotropy // Geophysics. 2000. Vol. 65, N 1. P. 202–210.
42. *Hanyga A., Rok V. E.* Wave propagation in micro-heterogeneous porous media: A model based on an integro-differential wave equation // J. Acoust. Soc. Am. 2000. Vol. 107, N 6. P. 2965–2972.
43. *Corcione J. M.* Viscoelastic effective rheologies for modelling wawe propagation in porous media // Geophys. Prospect. 1998. Vol. 46. P. 249–270.
44. *Cheng C. H., Toksoz M. N.* Elastic wave propagation in a fluid-filled borehole and synthetic acoustic logs // Geophysics. 1991. Vol. 46. N 7. P. 1042–1053.
45. *Tang X. M., Cheng C. H., Toksoz M. N.* Dynamic permeability and borehole Stoneley waves: a simplified Biot-Rosenbaum model // J. Acoust. Soc. Amer. 1991. Vol. 90, N 3. P. 1632–1646.
46. *Auriault J., Borne L., Chambon R.* Dynamic of porous saturated mediua, checking of generalized law Darcy // J. Acoust. Soc. Amer. 1985. Vol. 77. P. 1641–1650.
47. *Santos J. E., Corbero J. M., Ravazzoli C. L., Hensley J. L.* Reflection and transmission coefficients in fluid-saturated porous media // J. Acoust. Soc. Am. 1992. Vol. 91. P. 1911–1923.
48. *Johnson D. L.* Scalling function for dynamic permeability in porous media // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 63, N 5. P. 580.
49. *Bonnet G.* Basic singular solutions for a poroelastic medium in the dynamic range // J. Acoust. Soc. Amer. 1987. Vol. 82, N 5. P. 1758–1762.
50. *Boutin C., Bonnet G., Bard P. Y.* Green functions and associated sources in infinite and stratified poroelastic media // Geophys. J. R. Astr. Soc. 1987. Vol. 90. P. 521–550.
51. *Azi B.-Menahem, Gibson R.* Directional attenuation of SH waves in anisotropic poroelastic inhomogeneous media // J. Acoust. Soc. Amer. 1993. Vol. 93, N 6. P. 3057–3065.
52. *Berryman J. G.* Comparison of Upscaling Methods in Poroelasticity and its Generalizations // Jornal of engineering mechanics. 2005. P. 928–936.
53. *Thompson A. H., Katz A. J., Krohn C. E.* The microgeometry and transport properties of sedimentary rock // Adv. Phys. 1987. Vol. 36. P. 625–694.