

Ал. А. Ковтун

ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПОРИСТОГО СЛОЯ БИО МЕЖДУ УПРУГИМИ ПОЛУПРОСТРАНСТВАМИ

При интерпретации данных межскважинного сейсмического просвечивания часто возникает необходимость рассмотрения задачи на распространение волн внутри некоторого целевого продуктивного горизонта и вмещающей среде. Простейшая модель среды для таких исследований может состоять из флюидонасыщенного упруго-пористого слоя и вмещающей чисто упругой среды. Для выделения и исследования волн в такой модели необходимо найти корни дисперсионного уравнения среды для интересующего диапазона сейсмических частот. На свойства волнового поля, обусловленного характером распределения корней дисперсионного уравнения, существенное влияние могут оказывать условия контакта на границе слоя с вмещающей средой. Выполнение указанных исследований на начальном этапе требует построения и анализа соответствующих дисперсионных уравнений. Этим задачам и посвящена настоящая статья.

В работе рассматривается симметричная модель среды, состоящая из флюидонасыщенного пористого слоя, зажато между одинаковыми упругими полупространствами. Упруго-пористая среда описывается уравнениями теории Био [1]. На границах пористого слоя ставятся граничные условия типа жесткого контакта, а также условия контакта с проскальзыванием. Для указанных моделей выводятся дисперсионные уравнения в терминах переменных интегральных представлений метода Лемба [2]. В начале уравнения флюидонасыщенной пористой среды рассматриваются без учета какого-либо механизма диссипации. Получаемые при этом дисперсионные уравнения затем обобщаются на случай диссипационной модели, предложенной в работе [3]. Настоящая работа частично дополняет результаты статьи [4] Л. А. Молоткова, в которой дисперсионные уравнения для аналогичной модели среды с граничными условиями контакта с проскальзыванием выводятся в терминах представлений метода контурных интегралов и затем на основе полученных уравнений аналитически исследуются низкочастотные нормальные волны. В случае симметричной модели среды с одинаковыми упругими полупространствами волновое поле может быть представлено в виде суммы симметричной и антисимметричной частей, каждой из которых соответствует свое дисперсионное уравнение. Для построения симметричного и антисимметричного дисперсионных уравнений используется подход, применяемый в работе [4], который приводит к менее громоздким аналитическим вычислениям, чем при стандартном выводе этих уравнений.

1. Симметричные и антисимметричные дисперсионные уравнения в случае граничных условий контакта с проскальзыванием

Рассмотрим плоскую задачу. В декартовой системе координат $\{\tilde{x}, \tilde{z}\}$ задана «трех-слойная» среда ($\nu = 0, 1, 2$), состоящая из пористого слоя Био ($\nu = 1$) мощностью $2h$ ($-h < \tilde{z} < +h$) и двух примыкающих к нему одинаковых полупространств: $\nu = 0$ ($\tilde{z} < -h$) и $\nu = 2$ ($\tilde{z} > +h$). Упругие блоки среды $\nu = 0, 2$ характеризуются скоро-

стями v_{p0} , v_{s0} продольной и поперечной волн, упругими коэффициентами Ламе λ_0 , μ_0 и плотностью ρ_0 . Для описания поля в упругих полупространствах $\nu = 0, 2$ вводятся потенциалы φ_0 и ψ_0 , удовлетворяющие волновым уравнениям

$$\Delta\varphi_0 - \frac{1}{v_{p0}^2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta\psi_0 - \frac{1}{v_{s0}^2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Составляющие векторов смещений и напряжений в упругих блоках $\nu = 0, 2$ выражаются через потенциалы формулами

$$\begin{aligned} u_{\tilde{x}} &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \psi_0}{\partial \tilde{z}}, & u_{\tilde{z}} &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \psi_0}{\partial \tilde{x}}, \\ t_{\tilde{z}\tilde{x}} &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \tilde{z} \partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \tilde{z}^2} \right), \\ t_{\tilde{z}\tilde{z}} &= \lambda_0 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \tilde{x}^2} + (\lambda_0 + 2\mu_0) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \tilde{z}^2} + 2\mu_0 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \tilde{z} \partial \tilde{x}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \tilde{t}^2} + 2\mu_0 \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \tilde{z} \partial \tilde{x}} - \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \tilde{x}^2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Пористая среда Био при отсутствии диссипации описывается уравнениями движения [1]

$$\begin{aligned} (\lambda_c + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) &= \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}, \\ C \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + M \nabla(\nabla \cdot \mathbf{w}) &= \rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_m \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь \mathbf{u} — вектор смещения твердой фазы в пористой среде; \mathbf{w} — смещение жидкой фазы относительно твердой фазы; λ_c , μ , $H = \lambda_c + 2\mu$; C , M — упругие параметры пористой среды Био; ρ — средняя плотность пористой среды; ρ_f — плотность флюида; $\rho_m = \frac{\rho_f c_m}{\phi}$ — параметр, имеющий размерность плотности и связанный с извилистостью пор c_m ; ϕ — коэффициент пористости среды.

Для учета волнового поля в пористом слое Био целесообразно использовать потенциалы φ_{p1} , φ_{p2} и ψ [5], удовлетворяющие волновым уравнениям

$$\Delta\varphi_i - \frac{1}{v_{pi}^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \Delta\psi - \frac{1}{v_{s1}^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

где скорости v_{pi} , $i = 1, 2$, быстрой и медленной продольной волн и скорость v_{s1} поперечной волны в среде Био определяются равенствами

$$\begin{aligned} v_{pi} &= \frac{\rho M + \rho_m H - 2\rho_f C \pm \sqrt{(\rho M + \rho_m H - 2\rho_f C)^2 - 4(HM - C^2)(\rho\rho_m - \rho_f^2)}}{2(\rho\rho_m - \rho_f^2)}, \\ v_{s1} &= \frac{\mu\rho_m}{\rho\rho_m - \rho_f^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Компоненты векторов смещений \mathbf{u} , \mathbf{w} и полного напряжения $\boldsymbol{\tau}$ в пористой среде Био выражаются через потенциалы φ_1 , φ_2 и ψ следующими равенствами [5]:

$$u_{\tilde{x}} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{z}}, \quad u_{\tilde{z}} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{x}}, \quad w_{\tilde{z}} = B_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tilde{x}} + B_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tilde{x}} - \frac{\rho_f}{\rho_m} \frac{\partial \psi}{\partial \tilde{z}},$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{\tilde{z}\tilde{x}} &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tilde{z} \partial \tilde{x}} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \tilde{z} \partial \tilde{x}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{z}^2} \right), \\
 \tau_{\tilde{z}\tilde{z}} &= (H + CB_1) \Delta \varphi_1 + (H + CB_2) \Delta \varphi_2 - 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{z} \partial \tilde{x}} \right) = \\
 &= (\rho + B_1 \rho_f) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tilde{t}^2} + (\rho + B_2 \rho_f) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \tilde{t}^2} - 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tilde{z} \partial \tilde{x}} \right), \quad (6)
 \end{aligned}$$

где

$$B_i = \frac{v_i^2 \rho_f - C}{M - v_i^2 \rho_m} = \frac{H - v_i^2 \rho}{v_i^2 \rho_f - C}, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

Условия на границах $\tilde{z} = \pm h$ между чисто упругой и упруго-пористой средами даются соотношениями типа контакта с проскальзыванием [4]:

$$u_{\tilde{z}}^{(\nu)} = u_{\tilde{z}}, \quad w_{\tilde{z}} = 0, \quad t_{\tilde{z}\tilde{z}}^{(\nu)} = \tau_{\tilde{z}\tilde{z}}, \quad t_{\tilde{z}\tilde{x}}^{(\nu)} = 0, \quad \tau_{\tilde{z}\tilde{x}} = 0, \quad \nu = 0, 2. \quad (8)$$

Эти условия выражают непрерывность на границе нормальных компонент смещения и напряжения и равенство нулю касательных составляющих напряжения как в пористой, так и чисто упругой средах. Второе равенство в (8) означает отсутствие фильтрации флюида через границу.

Рассмотрим область $\tilde{z} < 0$, в которой волновое поле представлено в виде суммы симметричной и антисимметричной частей. Для нахождения каждой из этих частей достаточно рассмотреть область $\tilde{z} < 0$. В область $\tilde{z} > 0$ поля могут быть продолжены при использовании свойств симметрии (вида $u_{\tilde{x}}(\tilde{z}) = u_{\tilde{x}}(-\tilde{z})$, $u_{\tilde{z}}(\tilde{z}) = -u_{\tilde{z}}(-\tilde{z})$) и антисимметрии ($u_{\tilde{x}}(vz) = -u_{\tilde{x}}(-vz)$, $u_{\tilde{z}}(\tilde{z}) = u_{\tilde{z}}(-\tilde{z})$) относительно срединной плоскости ($\tilde{z} = 0$) слоя.

При использовании метода Лемба представления для потенциалов в полупространстве $\nu = 0$, как в симметричном, так и антисимметричном случаях, строятся в форме интегралов Фурье вида

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\varphi}_0 \\ \tilde{\psi}_0 \end{array} \right\} = Re \frac{1}{2} \frac{v}{\pi h^2} \int_0^\infty \left. \begin{array}{l} \Phi_0 \\ \Psi_0 \end{array} \right\} F(i \frac{v}{h} \kappa) \kappa e^{i \kappa \tau} d\kappa, \quad \nu = 1, 2, \quad (9)$$

где

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_0 \\ \Psi_0 \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_\lambda \left. \begin{array}{l} X_0 e^{\kappa(z+h)\alpha_0} + X_0^\circ e^{-\kappa(z+h)\alpha_0} \\ i [Y_0 e^{\kappa(z+h)\beta_0} + Y_0^\circ e^{-\kappa(z+h)\beta_0}] \end{array} \right\} e^{-i \kappa x \zeta} d\zeta. \quad (10)$$

Здесь вместо физических переменных t , \tilde{x} , \tilde{z} введены безразмерные переменные τ , x , z ,

$$\tau = t \frac{v}{h}, \quad x = \tilde{x}/h, \quad z = \tilde{z}/h, \quad (11)$$

а также безразмерный частотный параметр $\kappa = \omega h/v$. Функция $F(i\kappa)$ в (9) определяет частотный спектр источника. В (10) величины X_0° и Y_0° — известные амплитудные коэффициенты источника, конкретный вид которых не влияет на дисперсионное уравнение.

Потенциалы в слое Био в симметричном случае определяются равенствами

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\varphi}_j \\ \tilde{\psi}_j \end{array} \right\} = Re \frac{v}{\pi h^2} \int_0^\infty \left. \begin{array}{l} \Phi_j \\ \Psi_j \end{array} \right\} F(i \frac{v}{h} \kappa) \kappa e^{i \kappa \tau} d\kappa, \quad \nu = 1, 2, \quad (12)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_j \\ \Psi_1 \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda} X_j \cosh(\kappa z \alpha_j) \left. \vphantom{\int} \right\} e^{-i\kappa x \zeta} d\zeta, \quad j = 1, 2. \quad (13)$$

В антисимметричном случае потенциалы в слое Био определяются равенствами (12), в которых выражения (13) заменяются на

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_j \\ \Psi_1 \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda} X_j \sinh(\kappa z \alpha_j) \left. \vphantom{\int} \right\} e^{-i\kappa x \zeta} d\zeta, \quad j = 1, 2. \quad (14)$$

В выражениях (10), (13), (14) используются обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \sqrt{\zeta^2 - \gamma_0^2}, & \beta_0 &= \sqrt{\zeta^2 - \delta_0^2}, & g_\nu &= 2\zeta^2 - \delta_0^2, & \gamma_0 &= v/v_{p0}, & \delta_0 &= v/v_{s0}, \\ \alpha_1 &= \sqrt{\zeta^2 - \gamma_1^2}, & \alpha_2 &= \sqrt{\zeta^2 - \gamma_2^2}, & \beta &= \sqrt{\zeta^2 - \delta_1^2}, & g_1 &= 2\zeta^2 - \delta_1^2, \\ \gamma_1 &= v/v_1, & \gamma_2 &= v/v_2, & \delta_1 &= v/v_s. \end{aligned} \quad (15)$$

В безразмерных координатах (11) рассматриваемые потенциалы удовлетворяют волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_j}{\partial z^2} = \gamma_\nu^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_j}{\partial \tau^2} \quad (j = 0, 1, 2), \quad \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_i}{\partial z^2} = \gamma^2 \frac{\partial^2 \tilde{\psi}_i}{\partial \tau^2} \quad (i = 0, 1).$$

Поскольку параметр v в (11) и (15) допускает некоторый произвол определения (обычно это наименьшая скорость в среде), то для того чтобы в безразмерных координатах потенциалы $\tilde{\varphi}_j$ ($j = 0, 1, 2$) и $\tilde{\psi}_i$ ($i = 0, 1$) удовлетворяли прежним волновым уравнениям (1) и (4), а также оставались справедливыми формулы (6), (7), содержащие величины B_i ($i = 1, 2$), в дальнейшем будем полагать $v = 1$.

В симметричном случае граничные условия (8) при $\tilde{z} = -h$, в которых компоненты смещений и напряжений в средах $\nu = 0$ и $\nu = 1$ выражаются через потенциалы посредством равенств (2) и (6), приводят к следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha_0 X_0 + \zeta Y_0 + \alpha_1 \sinh(\kappa \alpha_1) X_1 + \alpha_2 \sinh(\kappa \alpha_2) X_2 + \zeta \sinh(\kappa \beta) Y &= \alpha_0 X_0^\circ - \zeta Y_0^\circ, \\ \mu_0 g_0 X_0 + 2\mu_0 \beta_0 \zeta Y_0 - [2\mu_1 \zeta^2 + (\rho + B_1 \rho_f)] \cosh(\kappa \alpha_1) X_1 - \\ - [2\mu_1 \zeta^2 + (\rho + B_2 \rho_f)] \cosh(\kappa \alpha_2) X_2 - 2\mu_1 \beta \zeta Y \cosh(\kappa \beta) Y &= -\mu_0 g_0 X_0^\circ + 2\mu_0 \beta_0 \zeta Y_0^\circ, \\ 2\alpha_0 \zeta X_0 + g_0 Y_0 &= 2\alpha_0 \zeta X_0^\circ - g_0 Y_0^\circ, \\ B_1 \alpha_1 \sinh(\kappa \alpha_1) X_1 + B_2 \alpha_2 \sinh(\kappa \alpha_2) X_2 - \rho_f / \rho_m \zeta Y \sinh(\kappa \beta) Y &= 0, \\ 2\alpha_1 \zeta \sinh(\kappa \alpha_1) X_1 + 2\alpha_2 \zeta \sinh(\kappa \alpha_2) X_2 + g_1 \sinh(\kappa \beta) Y &= 0 \end{aligned}$$

относительно неизвестных амплитудных коэффициентов X_0, Y_0, X_1, X_2, Y . Функции X_0° и Y_0° в правых частях равенств, отвечающие источнику, полагаются известными.

Матрица этой системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \zeta & \alpha_1 \sinh(\kappa \alpha_1) & \alpha_2 \sinh(\kappa \alpha_2) & \zeta \sinh(\kappa \beta) \\ \mu_0 g_0 & 2\mu_0 \zeta \beta_0 & -(2\mu_1 \zeta^2 + \rho + B_1 \rho_f) \times & -(2\mu_1 \zeta^2 + \rho + B_2 \rho_f) \times & -2\mu_1 \beta \zeta \cosh(\kappa \beta) \\ & & \times \cosh(\kappa \alpha_1) & \times \cosh(\kappa \alpha_2) & \\ 2\zeta \alpha_0 & g_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \alpha_1 \sinh(\kappa \alpha_1) & B_2 \alpha_2 \sinh(\kappa \alpha_2) & -\rho_f / \rho_m \zeta \sinh(\kappa \beta) \\ 0 & 0 & 2\alpha_1 \zeta \sinh(\kappa \alpha_1) & 2\alpha_2 \zeta \sinh(\kappa \alpha_2) & g_1 \sinh(\kappa \beta) \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы представляется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \Delta_{sym} = & \\ & -\alpha_0\alpha_2(2\mu_1\zeta^2 + \rho + B_1\rho_f)(2\rho_f/\rho_m\zeta^2 + B_2g_1)(2\zeta^2 - g_0) \cosh(\kappa\alpha_1) \sinh(\kappa\alpha_2) \sinh(\kappa\beta) + \\ & +\alpha_0\alpha_1(2\mu_1\zeta^2 + \rho + B_2\rho_f)(2\rho_f/\rho_m\zeta^2 + B_1g_1)(2\zeta^2 - g_0) \sinh(\kappa\alpha_1) \cosh(\kappa\alpha_2) \sinh(\kappa\beta) - \\ & -4\zeta^2\mu_1(B_1 - B_2)(2\zeta^2 - g_0)\alpha_0\beta\alpha_1\alpha_2 \sinh(\kappa\alpha_1) \sinh(\kappa\alpha_2) \cosh(\kappa\beta) - \\ & -\mu_0(2\zeta^2 - g_1)(B_1 - B_2)(4\alpha_0\beta_0\zeta^2 - g_0^2)\alpha_1\alpha_2 \sinh(\kappa\alpha_1) \sinh(\kappa\alpha_2) \sinh(\kappa\beta). \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая равенство $2\zeta^2 - g_i = \delta_i^2$ ($i = 0, 1$) и вводя обозначение $R_0 = 4\alpha_0\beta_0\zeta^2 - g_0^2$, дисперсионное уравнение для симметричного случая запишем в виде

$$\begin{aligned} & (2\mu_1\zeta^2 + \rho + B_1\rho_f)(2\rho_f/\rho_m\zeta^2 + B_2g_1)/(B_1 - B_2) \coth(\kappa\alpha_1)/\alpha_1 - \\ & -(2\mu_1\zeta^2 - \rho + B_2\rho_f)(2\rho_f/\rho_m\zeta^2 + B_1g_1)/(B_1 - B_2) \coth(\kappa\alpha_2)/\alpha_2 + \\ & +4\mu_1\zeta^2\beta \coth(\kappa\beta) + \mu_0 \frac{\delta_1^2}{\delta_0^2} \frac{R_0}{\alpha_0} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

В антисимметричном случае граничные условия при $\tilde{z} = -h$ для той же модели приводят к системе уравнений

$$\begin{aligned} & \alpha_0 X_0 + \zeta Y_0 - \alpha_1 \cosh(\kappa\alpha_1) X_1 - \alpha_2 \cosh(\kappa\alpha_2) X_2 - \zeta \cosh(\kappa\beta) Y = \alpha_0 X_0^\circ - \zeta Y_0^\circ, \\ & \mu_0 g_0 X_0 + 2\mu_0 \beta_0 \zeta Y_0 + (2\mu_1 \zeta^2 + \rho + B_1 \rho_f) \sinh(\kappa\alpha_1) X_1 + \\ & + (2\mu_1 \zeta^2 + \rho + B_2 \rho_f) \sinh(\kappa\alpha_2) X_2 + 2\mu_1 \beta \zeta Y \sinh(\kappa\beta) = -\mu_0 g_0 X_0^\circ + 2\mu_0 \beta_0 \zeta Y_0^\circ, \\ & 2\alpha_0 \zeta X_0 + g_0 Y_0 = 2\alpha_0 \zeta X_0^\circ - g_0 Y_0^\circ, \\ & B_1 \alpha_1 \cosh(\kappa\alpha_1) X_1 + B_2 \alpha_2 \cosh(\kappa\alpha_2) X_2 - \rho_f / \rho_m \zeta Y \cosh(\kappa\beta) = 0, \\ & 2\alpha_1 \zeta \cosh(\kappa\alpha_1) X_1 + 2\alpha_2 \zeta \cosh(\kappa\alpha_2) X_2 + g_1 \cosh(\kappa\beta) Y = 0. \end{aligned}$$

Матрица системы принимает вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 & \zeta & -\alpha_1 \cosh(\kappa\alpha_1) & -\alpha_2 \cosh(\kappa\alpha_2) & -\zeta \cosh(\kappa\beta) \\ \mu_0 g_0 & 2\mu_0 \beta_0 \zeta & (2\mu_1 \zeta^2 + \rho + B_1 \rho_f) \times & (2\mu_1 \zeta^2 + \rho + B_2 \rho_f) \times & 2\mu_1 \beta \zeta \sinh(\kappa\beta) \\ & & \times \sinh(\kappa\alpha_1) & \times \sinh(\kappa\alpha_2) & \\ 2\zeta \alpha_0 & g_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \alpha_1 \cosh(\kappa\alpha_1) & B_2 \alpha_2 \cosh(\kappa\alpha_2) & -\rho_f / \rho_m \zeta \cosh(\kappa\beta) \\ 0 & 0 & 2\alpha_1 \zeta \cosh(\kappa\alpha_1) & 2\alpha_2 \zeta \cosh(\kappa\alpha_2) & g_1 \cosh(\kappa\beta) \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы

$$\begin{aligned} \Delta_{asym} = & \\ & +\alpha_0\alpha_2(2\mu_1\zeta^2 + \rho + B_1\rho_f)(2\rho_f/\rho_m\zeta^2 + B_2g_1)(2\zeta^2 - g_0) \sinh(\kappa\alpha_1) \cosh(\kappa\alpha_2) \cosh(\kappa\beta) - \\ & -\alpha_0\alpha_1(2\mu_1\zeta^2 + \rho + B_2\rho_f)(2\rho_f/\rho_m\zeta^2 + B_1g_1)(2\zeta^2 - g_0) \cosh(\kappa\alpha_1) \sinh(\kappa\alpha_2) \cosh(\kappa\beta) + \\ & +4\zeta^2\alpha_0\alpha_1\alpha_2\mu_1\beta(B_1 - B_2)(2\zeta^2 - g_0) \cdot \cosh(\kappa\alpha_1) \cosh(\kappa\alpha_2) \sinh(\kappa\beta) + \\ & +\mu_0\alpha_1\alpha_2(2\zeta^2 - g_1)(B_1 - B_2)(4\alpha_0\beta_0\zeta^2 - g_0^2) \cosh(\kappa\alpha_1) \cosh(\kappa\alpha_2) \cosh(\kappa\beta). \end{aligned}$$

Антисимметричное дисперсионное уравнение запишем в виде

$$\begin{aligned} & (2\mu_1\zeta^2 + \rho + B_1\rho_f)(2\rho_f/\rho_m\zeta^2 + B_2g_1)/(B_1 - B_2) \tanh(\kappa\alpha_1)/\alpha_1 - \\ & -(2\mu_1\zeta^2 + \rho + B_2\rho_f)(2\rho_f/\rho_m\zeta^2 + B_1g_1)/(B_1 - B_2) \tanh(\kappa\alpha_2)/\alpha_2 + \\ & + 4\mu_1\zeta^2\beta \tanh(\kappa\beta) + \mu_0 \frac{\delta_1^2 R_0}{\delta_0^2 \alpha_0} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Построим теперь уравнения, имеющие особые корни, для предельного случая $\kappa \rightarrow 0$. Для этого рассмотрим симметричное дисперсионное уравнение вида $\Delta_{sym}/\kappa^2 = 0$, где Δ_{sym} определяется равенством (16). При $\kappa \rightarrow 0$ левая часть этого уравнения после некоторых преобразований принимает вид

$$\begin{aligned} \lim_{\kappa \rightarrow 0} \Delta_{sym}/\kappa^2 & \equiv (2\mu_1\zeta^2 + \rho + B_1\rho_f)(2\rho_f/\rho_m\zeta^2 + B_2g_1)/\alpha_1 - \\ & -(2\mu_1\zeta^2 + \rho + B_2\rho_f)(2\rho_f/\rho_m\zeta^2 + B_1g_1)/\alpha_2 + 4\mu_1\zeta^2\beta(B_1 - B_2) = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Далее преобразуем дисперсионные уравнения (17)–(19) к такому виду, при котором величины B_1 и B_2 выражаются через параметры пористой среды. Проведем вычисления с применением равенств (7):

$$\begin{aligned} B_1 - B_2 & = \frac{(M\rho_f - C\rho_m)(v_{p1}^2 - v_{p2}^2)}{(M - \rho_m v_{p1}^2)(M - \rho_m v_{p2}^2)}; \\ 2\mu_1\zeta^2 + \rho + B_i\rho_f & = 2\mu_1\zeta^2 + \frac{H\rho_f - C\rho}{v_{pi}^2\rho_f - C}, \quad i = 1, 2; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} 2\rho_f/\rho_m\zeta^2 + B_1g_1 & = 2\zeta^2(\rho_f/\rho_m + B_1) - B_1 \frac{\rho\rho_m - \rho_f^2}{\mu_1\rho_m} = \\ & = \frac{(M\rho_f - C\rho_m)}{\mu_1\rho_m(M - \rho_m v_{p2}^2)} \left(2\mu_1\zeta^2 + \frac{H\rho_f - C\rho}{v_{p1}^2\rho_f - C} \right), \\ 2\rho_f/\rho_m\zeta^2 + B_2g_1 & = 2\zeta^2(\rho_f/\rho_m + B_2) - B_2 \frac{\rho\rho_m - \rho_f^2}{\mu_1\rho_m} = \\ & = \frac{(M\rho_f - C\rho_m)}{\mu_1\rho_m(M - \rho_m v_{p1}^2)} \left(2\mu_1\zeta^2 + \frac{H\rho_f - C\rho}{v_{p2}^2\rho_f - C} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Последние две формулы выводятся при использовании тождества

$$(C - \rho_f v_{p1}^2)(\rho_f v_{p2}^2 - C)(\rho\rho_m - \rho_f^2) = (H\rho_f - C\rho)(C\rho_m - M\rho_f),$$

доказанного в [6] на основе применения теоремы Виетта:

$$v_{p1}^2 + v_{p2}^2 = \frac{H\rho_m + M\rho - 2C\rho_f}{\rho\rho_m - \rho_f^2}, \quad v_{p1}^2 v_{p2}^2 = \frac{HM - C^2}{\rho\rho_m - \rho_f^2}$$

для корней v_{p1} и v_{p2} уравнения

$$(\rho\rho_m - \rho_f^2)v^4 - (H\rho_m + M\rho - 2C\rho_f)v^2 + HM - C^2 = 0.$$

В результате уравнения (17), (18) заменяются соответственно на

$$\begin{aligned}
 & (M - v_{p1}^2 \rho_m) \left(2\mu_1 \zeta^2 + \frac{H\rho_f - C\rho}{v_{p1}^2 \rho_f - C} \right)^2 \frac{\coth(\kappa\alpha_1)}{\alpha_1} - \\
 & - (M - v_{p2}^2 \rho_m) \left(2\mu_1 \zeta^2 + \frac{H\rho_f - C\rho}{v_{p2}^2 \rho_f - C} \right)^2 \frac{\coth(\kappa\alpha_2)}{\alpha_2} + \\
 & + 4\mu_1^2 \rho_m (v_{p1}^2 - v_{p2}^2) \zeta^2 \beta \coth(\kappa\beta) + \mu_0 \mu_1 \rho_m (v_{p1}^2 - v_{p2}^2) \frac{\delta_1^2 R_0}{\delta_0^2 \alpha_0} = 0
 \end{aligned} \quad (22)$$

и

$$\begin{aligned}
 & (M - v_{p1}^2 \rho_m) \left(2\mu_1 \zeta^2 + \frac{H\rho_f - C\rho}{v_{p1}^2 \rho_f - C} \right)^2 \frac{\tanh(\kappa\alpha_1)}{\alpha_1} - \\
 & - (M - v_{p2}^2 \rho_m) \left(2\mu_1 \zeta^2 + \frac{H\rho_f - C\rho}{v_{p2}^2 \rho_f - C} \right)^2 \frac{\tanh(\kappa\alpha_2)}{\alpha_2} + \\
 & + 4\mu_1^2 \rho_m (v_{p1}^2 - v_{p2}^2) \zeta^2 \beta \tanh(\kappa\beta) + \mu_0 \mu_1 \rho_m (v_{p1}^2 - v_{p2}^2) \frac{\delta_1^2 R_0}{\delta_0^2 \alpha_0} = 0.
 \end{aligned} \quad (23)$$

Уравнение (19) после подстановки выражений (20), (21) и использования формул (15) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 & (M - v_{p1}^2 \rho_m) \left(2\mu_1 \zeta^2 + \frac{H\rho_f - C\rho}{v_{p1}^2 \rho_f - C} \right)^2 \left(\zeta^2 - \frac{1}{v_{p2}^2} \right) - (M - v_{p2}^2 \rho_m) \left(2\mu_1 \zeta^2 + \frac{H\rho_f - C\rho}{v_{p2}^2 \rho_f - C} \right)^2 \left(\zeta^2 - \frac{1}{v_{p1}^2} \right) + \\
 & + 4\mu_1^2 \rho_m (v_{p1}^2 - v_{p2}^2) \zeta^2 \left(\zeta^2 - \frac{1}{v_{p2}^2} \right) \left(\zeta^2 - \frac{1}{v_{p1}^2} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\tilde{M}_i = M - v_{pi}^2 \rho_m, \quad \tilde{C}_i = v_{pi}^2 \rho_f - C, \quad i = 1, 2, \quad \tilde{H} = H\rho_f - C\rho$$

и перепишем это уравнение:

$$\begin{aligned}
 & 4\mu_1^2 (\tilde{M}_1 - \tilde{M}_2) \zeta^6 - 4\mu_1^2 \left(\frac{\tilde{M}_1}{v_{p2}^2} - \frac{\tilde{M}_2}{v_{p1}^2} \right) \zeta^4 - 4\mu_1 \tilde{H} \left(\frac{\tilde{M}_1}{\tilde{C}_1} - \frac{\tilde{M}_2}{\tilde{C}_2} \right) \zeta^4 - \\
 & - 4\mu_1 \tilde{H} \left(\frac{\tilde{M}_1}{v_{p2}^2 \tilde{C}_1} - \frac{\tilde{M}_2}{v_{p1}^2 \tilde{C}_2} \right) \zeta^2 + \tilde{H}^2 \left(\frac{\tilde{M}_1}{\tilde{C}_1^2} - \frac{\tilde{M}_2}{\tilde{C}_2^2} \right) \zeta^2 - \tilde{H}^2 \left(\frac{\tilde{M}_1}{v_{p2}^2 \tilde{C}_1^2} - \frac{\tilde{M}_2}{v_{p1}^2 \tilde{C}_2^2} \right) + \\
 & + 4\mu_1^2 \rho_m (v_{p1}^2 - v_{p2}^2) \left(\zeta^6 - \frac{v_1^2 + v_2^2}{v_{p1}^2 v_{p2}^2} \zeta^4 + \frac{1}{v_{p1}^2 v_{p2}^2} \zeta^2 \right) = 0.
 \end{aligned} \quad (24)$$

После громоздких вычислений с использованием формул

$$\begin{aligned}
 \frac{\tilde{M}_1}{\tilde{C}_1} - \frac{\tilde{M}_2}{\tilde{C}_2} &= -\frac{v_{p1}^2 - v_{p2}^2}{v_{p1}^2 v_{p2}^2} \frac{HM - C^2}{H\rho_m - C\rho}, & \frac{\tilde{M}_1}{v_{p2}^2 \tilde{C}_1} - \frac{\tilde{M}_2}{v_{p1}^2 \tilde{C}_2} &= -\frac{v_{p1}^2 - v_{p2}^2}{v_{p1}^2 v_{p2}^2} \frac{H\rho_m - C\rho_f}{H\rho_m - C\rho}, \\
 \frac{\tilde{M}_1}{\tilde{C}_1^2} - \frac{\tilde{M}_2}{\tilde{C}_2^2} &= -\rho \frac{v_{p1}^2 - v_{p2}^2}{v_{p1}^2 v_{p2}^2} \frac{HM - C^2}{(H\rho_m - C\rho)^2}, & \frac{\tilde{M}_1}{v_{p2}^2 \tilde{C}_1^2} - \frac{\tilde{M}_2}{v_{p1}^2 \tilde{C}_2^2} &= -H \frac{v_{p1}^2 - v_{p2}^2}{v_{p1}^2 v_{p2}^2} \frac{\rho\rho_m - \rho_f^2}{(H\rho_m - C\rho)^2},
 \end{aligned}$$

в результате которых сокращаются члены при ζ^6 , правая часть (24) приводится к равенству

$$-\frac{v_{p1}^2 - v_{p2}^2}{v_{p1}^2 v_{p2}^2} \Delta_{pl} = 0,$$

дающему искомое уравнение

$$\Delta_{pl} \equiv 4\mu_1(\mu_1 M + HM - C^2)\zeta^4 - [4\mu_1(\mu_1 \bar{\rho}_m + H\rho_m - C\rho_f) + (HM - C^2)\rho]\zeta^2 + H(\rho\rho_m - \rho_f^2) = 0. \quad (25)$$

Вещественные корни уравнения (25) имеют смысл квадратов «обратных» скоростей $z^2 \equiv \frac{1}{\bar{v}_i^2}$, $i = 1, 2$, где величины \bar{v}_i , $i = 1, 2$ суть скорости пластинчатых волн при условии закрытости пор на границах. Если в (25) совершить переход от переменной ζ метода Лемба к переменной η в методе контурных интегралов при помощи соотношения $\zeta = \frac{1}{-i\eta}$, то получится уравнение пластинчатых волн, выведенное Л.А. Молотковым в [4]. В этой работе доказано, что для скоростей $v_{p1}, v_{p2}, \bar{v}_1, \bar{v}_2$ всегда выполняются соотношения

$$v_{p1} > \bar{v}_1 > v_{p2} > \bar{v}_2.$$

Антисимметричное уравнение (18) в предельном случае при $\kappa \rightarrow 0$ дает равенство $\mu_0 \frac{\delta_1^2}{\delta_0^2} \frac{R_0}{\alpha_0} = 0$, из которого вытекает известное уравнение ($R_0 \equiv 4\zeta^2 \alpha_0 \beta_0 - g_0^2 = 0$) рэлеевской волны для чисто упругих полупространств. Это уравнение имеет корень $\zeta = 1/v_R$, который определяет величину обратной скорости v_R рэлеевской волны. В работе [4] показано, что между скоростями \bar{v}_1, \bar{v}_2 и v_R могут выполняться три возможных соотношения: $\bar{v}_1 > \bar{v}_2 > v_R$, $\bar{v}_1 > v_R > \bar{v}_2$, $v_R > \bar{v}_1 > \bar{v}_2$.

2. Дисперсионные уравнения для модели среды с граничными условиями типа жесткого контакта

Построим теперь дисперсионные уравнения для этой же модели среды в случае существования на границах $z = \pm h$ пористого слоя условий типа жесткого контакта, которые даются соотношениями [5]

$$u_x^{(0)} = u_x^{(1)}, \quad u_z^{(0)} = u_z^{(1)}, \quad w_z^{(1)} = 0, \quad t_{zx}^{(0)} = \tau_{zx}^{(1)}, \quad t_{zz}^{(0)} = \tau_{zz}^{(1)}. \quad (26)$$

Матрица системы уравнений относительно функциональных коэффициентов, вытекающей из граничных условий (26) и описывающих симметричную часть волнового поля, имеет вид

$$\Lambda_{sym}^{(w)} = \begin{pmatrix} \zeta & \beta_0 & -\zeta \cosh(\kappa\alpha_1) & -\zeta \cosh(\kappa\alpha_2) & -\beta_1 \cosh(\kappa\beta_1) \\ \alpha_0 & \zeta & \alpha_1 \sinh(\kappa\alpha_1) & \alpha_2 \sinh(\kappa\alpha_2) & \zeta \sinh(\kappa\beta_1) \\ 0 & 0 & B_1 \alpha_1 \sinh(\kappa\alpha_1) & B_2 \alpha_2 \sinh(\kappa\alpha_2) & -\rho_f / \rho_m \zeta \sinh(\kappa\beta_1) \\ 2\mu_0 \zeta \alpha_0 & \mu_0 g_0 & 2\mu_1 \zeta \alpha_1 \sinh(\kappa\alpha_1) & 2\mu_1 \zeta \alpha_2 \sinh(\kappa\alpha_2) & \mu_1 g_1 \sinh(\kappa\beta_1) \\ \mu_0 g_0 & 2\mu_0 \zeta \beta_0 & -(2\mu_1 \zeta^2 + \rho + B_1 \rho_f) \times \\ & & \times \cosh(\kappa\alpha_1) & -(2\mu_1 \zeta^2 + \rho + B_2 \rho_f) \times \\ & & & \times \cosh(\kappa\alpha_2) & -2\mu_1 \zeta \beta_1 \cosh(\kappa\beta_1) \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы

$$\begin{aligned}
 \det(\Lambda_{sym}^{(w)}) = & \alpha_2 \left[\mu_1(\zeta^2 - \alpha_0\beta_0)P_1G_2 - \mu_0^2\zeta^2(B_2 + \rho_f/\rho_m)R_0 + \right. \\
 & \left. + \mu_0\mu_1\zeta^2(2\alpha_0\beta_0 - g_0)G_2 + \mu_0\zeta^2(2\alpha_0\beta_0 - g_0)(\rho_f/\rho_m + B_2)P_1 \right] \times \\
 & \times \cosh(\kappa\alpha_1) \sinh(\kappa\alpha_2) \sinh(\kappa\beta_1) - \\
 & - \alpha_1 \left[\mu_1(\zeta^2 - \alpha_0\beta_0)P_2G_1 - \mu_0^2\zeta^2(\rho_f/\rho_m + B_1)R_0 + \mu_0\mu_1\zeta^2(2\alpha_0\beta_0 - g_0)G_1 + \right. \\
 & \left. + \mu_0\zeta^2(2\alpha_0\beta_0 - g_0)(\rho_f/\rho_m + B_1)P_2 \right] \sinh(\kappa\alpha_1) \cosh(\kappa\alpha_2) \sinh(\kappa\beta_1) + \\
 & + \alpha_1\alpha_2\beta_1(B_1 - B_2) \left[4\mu_1^2\zeta^2(\zeta^2 - \alpha_0\beta_0) + 4\mu_0\mu_1\zeta^2(2\alpha_0\beta_0 - g_0) - \mu_0^2R_0 \right] \times \\
 & \times \sinh(\kappa\alpha_1) \sinh(\kappa\alpha_2) \cosh(\kappa\beta_1) + \\
 & + \mu_0\alpha_0B_2\alpha_2\beta_1(\rho + B_1\rho_f)(2\zeta^2 - g_0) \cosh(\kappa\alpha_1) \sinh(\kappa\alpha_2) \cosh(\kappa\beta_1) - \\
 & - \mu_0\alpha_0B_1\alpha_1\beta_1(\rho + B_2\rho_f)(2\zeta^2 - g_0) \sinh(\kappa\alpha_1) \cosh(\kappa\alpha_2) \cosh(\kappa\beta_1) + \\
 & + \mu_0\zeta^2\alpha_0\rho_f^2/\rho_m(B_1 - B_2)(2\zeta^2 - g_0) \cosh(\kappa\alpha_1) \cosh(\kappa\alpha_2) \sinh(\kappa\beta_1) \\
 & + \mu_0\mu_1\beta_0\alpha_1\alpha_2(B_1 - B_2)(2\zeta^2 - g_1)(2\zeta^2 - g_0) \sinh(\kappa\alpha_1) \sinh(\kappa\alpha_2) \sinh(\kappa\beta_1).
 \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения

$$P_i = 2\mu_1\zeta^2 + \rho + \rho_f B_i, \quad G_i = 2\zeta^2\rho_f/\rho_m + g_1 B_i$$

и ранее введенное $R_0 = 4\zeta^2\alpha_0\beta_0 - g_0^2$.

Симметричное дисперсионное уравнение запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \mu_0\mu_1\zeta^2(2\alpha_0\beta_0 - g_0)G_2 + \mu_1(\zeta^2 - \alpha_0\beta_0)P_1G_2 - \mu_0^2\zeta^2(B_2 + \rho_f/\rho_m)R_0 + \right. \\
 & \left. + \mu_0\zeta^2(2\alpha_0\beta_0 - g_0)(\rho_f/\rho_m + B_2)P_1 \right\} \frac{\coth(\kappa\alpha_1)}{\alpha_1} - \\
 & - \left\{ \mu_0\mu_1\zeta^2(2\alpha_0\beta_0 - g_0)G_1 + \mu_1(\zeta^2 - \alpha_0\beta_0)P_2G_1 - \mu_0^2\zeta^2(\rho_f/\rho_m + B_1)R_0 + \right. \\
 & \left. + \mu_0\zeta^2(2\alpha_0\beta_0 - g_0)(\rho_f/\rho_m + B_1)P_2 \right\} \frac{\coth(\kappa\alpha_2)}{\alpha_2} + \\
 & + (B_1 - B_2) \left[4\mu_1^2\zeta^2(\zeta^2 - \alpha_0\beta_0) + 4\mu_0\mu_1\zeta^2(2\alpha_0\beta_0 - g_0) - \mu_0^2R_0 \right] \beta_1 \coth(\kappa\beta_1) + \\
 & + \mu_0\delta_0^2\alpha_0 \left[B_2(\rho + B_1\rho_f) \frac{\coth(\kappa\alpha_1)}{\alpha_1} - B_1(\rho + B_2\rho_f) \frac{\coth(\kappa\alpha_2)}{\alpha_2} \right] \beta_1 \coth(\kappa\beta_1) + \\
 & + \mu_0\delta_0^2\rho_f^2/\rho_m(B_1 - B_2)\zeta^2\alpha_0 \frac{\coth(\kappa\alpha_1)}{\alpha_1} \frac{\coth(\kappa\alpha_2)}{\alpha_2} + \mu_0\mu_1\delta_0^2\delta_1^2(B_1 - B_2)\beta_0 = 0.
 \end{aligned}$$

В антисимметричном случае матрица системы уравнений принимает вид

$$\Lambda_{asym}^{(w)} = \begin{pmatrix} \zeta & \beta_0 & \zeta \sinh(\kappa\alpha_1) & \zeta \sinh(\kappa\alpha_2) & \beta_1 \sinh(\kappa\beta_1) \\ \alpha_0 & \zeta & -\alpha_1 \cosh(\kappa\alpha_1) & -\alpha_2 \cosh(\kappa\alpha_2) & -\zeta \cosh(\kappa\beta_1) \\ 0 & 0 & B_1\alpha_1 \cosh(\kappa\alpha_1) & B_2\alpha_2 \cosh(\kappa\alpha_2) & -\rho_f/\rho_m\zeta \cosh(\kappa\beta_1) \\ 2\mu_0\zeta\alpha_0 & \mu_0g_0 & -2\mu_1\zeta\alpha_1 \cosh(\kappa\alpha_1) & -2\mu_1\zeta\alpha_2 \cosh(\kappa\alpha_2) & -\mu_1g_1 \cosh(\kappa\beta_1) \\ \mu_0g_0 & 2\mu_0\zeta\beta_0 & (2\mu_1\zeta^2 + \rho + B_1\rho_f) \times & (2\mu_1\zeta^2 + \rho + B_2\rho_f) \times & 2\mu_1\zeta\beta_1 \sinh(\kappa\beta_1) \\ & & \times \sinh(\kappa\alpha_1) & \times \sinh(\kappa\alpha_2) & \end{pmatrix}.$$

Дисперсионное уравнение для антисимметричного случая имеет вид

$$\begin{aligned}
& \left[\mu_1(\zeta^2 - \alpha_0\beta_0)P_1G_2 + \mu_0\mu_1\zeta^2(2\alpha_0\beta_0 - g_0)G_2 - \mu_0^2\zeta^2(B_2 + \rho_f/\rho_m)R_0 + \right. \\
& \left. + \mu_0\zeta^2(2\alpha_0\beta_0 - g_0)(B_2 + \rho_f/\rho_m)P_1 \right] \frac{\tanh(\kappa\alpha_1)}{\alpha_1} - \\
& - \left[\mu_1(\zeta^2 - \alpha_0\beta_0)P_2G_1 + \mu_0\mu_1\zeta^2(2\alpha_0\beta_0 - g_0)G_1 - \mu_0^2\zeta^2(B_1 + \rho_f/\rho_m)R_0 + \right. \\
& \left. + \mu_0\zeta^2(2\alpha_0\beta_0 - g_0)(B_1 + \rho_f/\rho_m)P_2 \right] \frac{\tanh(\kappa\alpha_2)}{\alpha_2} + \\
& + (B_1 - B_2) \left[4\mu_0\mu_1\zeta^2(2\alpha_0\beta_0 - g_0) + 4\mu_1^2\zeta^2(\zeta^2 - \alpha_0\beta_0) - \mu_0^2R_0 \right] \beta_1 \tanh(\kappa\beta_1) + \\
& + \mu_0\delta_0^2\alpha_0 \left[B_2(\rho + B_1\rho_f) \frac{\tanh(\kappa\alpha_1)}{\alpha_2} - B_1(\rho + B_2\rho_f) \frac{\tanh(\kappa\alpha_2)}{\alpha_2} \right] \beta_1 \tanh(\kappa\beta_1) + \\
& + \mu_0\delta_0^2\rho_f^2/\rho_m(B_1 - B_2)\zeta^2\alpha_0 \frac{\tanh(\kappa\alpha_1)}{\alpha_1} \frac{\tanh(\kappa\alpha_2)}{\alpha_2} + \mu_0\delta_0^2\mu_1\delta_1^2\beta_0(B_1 - B_2) = 0.
\end{aligned}$$

Симметричное и антисимметричное дисперсионные уравнения для условий жесткого контакта на границах пористого слоя более сложны и громоздки в сравнении с уравнениями (17) и (18), полученными в случае граничных условий проскальзывания. Здесь имеется аналогия с моделью упругого (непористого) слоя, исследованного в [7] для случаев жесткого и скользящего контактов. В частности, в случае чисто упругой модели с контактом проскальзывания симметричное дисперсионное уравнение дается равенством

$$(4\alpha_1\beta_1\zeta^2 \coth(\kappa\beta_1) - g_1^2 \coth(\kappa\alpha_1)) + \mu_0/\mu_1\delta_1^2/\delta_0^2\alpha_1/\alpha_0R_0 = 0,$$

а в случае той же модели с жестким контактом симметричное дисперсионное уравнение принимает вид

$$\begin{aligned}
& \left[\mu_0/\mu_1\zeta^2R_0 + \mu_1/\mu_0g_1^2(\zeta^2 - \alpha_0\beta_0) \right] \frac{\coth(\kappa\alpha_1)}{\alpha_1} + \\
& + \left[4\mu_0\zeta^2(\zeta^2 - \alpha_0\beta_0) + \mu_0/\mu_1R_0 \right] \beta_1 \coth(\kappa\beta_1) - \\
& - \alpha_0\beta_1\delta_1^2\delta_0^2 \frac{\coth(\kappa\alpha_1)}{\alpha_1} \coth(\kappa\beta_1) + \delta_1^2\delta_0^2\beta_0 = 0.
\end{aligned}$$

3. Случай пористого слоя Био с диссипацией

Рассмотрим упруго-пористую среду с механизмом диссипации Био–Столл, описываемую в частотной области уравнениями [1, 3]:

$$\begin{aligned}
& (\lambda_c + \mu)\nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}) + \mu\Delta\tilde{\mathbf{u}} + (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}}) + \omega^2\rho\tilde{\mathbf{u}} + \omega^2\rho_f\tilde{\mathbf{w}} = 0, \\
& \nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}) + M\nabla(\nabla \cdot \tilde{\mathbf{w}}) + \omega^2\rho_f\tilde{\mathbf{u}} + \omega^2(\rho_m - \frac{i}{\omega\kappa}F(\xi))\tilde{\mathbf{w}} = 0, \quad (27)
\end{aligned}$$

где η — вязкость флюида; κ — проницаемость пористой среды; $F(\xi)$ — комплексная функция,

$$F(\xi) = \frac{\xi T(\xi)}{4[1 + (2i/\xi)T(\xi)]},$$

$\xi = a\sqrt{\frac{\omega\rho_f}{\eta}}$ (a — некоторая константа). Функция $T(\xi)$ определяется равенством

$$T(\xi) = \frac{\text{ber}'(\xi) + i\text{bei}'(\xi)}{\text{ber}(\xi) + i\text{bei}(\xi)},$$

где $\text{ber}(z)$, $\text{bei}(z)$ — функции Кельвина.

Выразим векторы смещений $\tilde{\mathbf{u}}$ и $\tilde{\mathbf{w}}$ через потенциалы $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$, $\bar{\boldsymbol{\psi}}_1 = \mathbf{j}\bar{\boldsymbol{\psi}}_1$:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}} &= \nabla\bar{\varphi}_1 + \nabla\bar{\varphi}_2 + \text{rot}\bar{\boldsymbol{\psi}}_1, \\ \tilde{\mathbf{w}} &= \tilde{B}_1\nabla\bar{\varphi}_1 + \tilde{B}_2\nabla\bar{\varphi}_2 + \frac{\rho_f}{(\rho_m - \frac{i}{\omega}\frac{\eta}{\varkappa}F)}\text{rot}\bar{\boldsymbol{\psi}}_1,\end{aligned}\quad (28)$$

которые являются решениями соответственно уравнений

$$\Delta\bar{\varphi}_i + \frac{\omega}{c_{pi}^2}\bar{\varphi}_i = 0, \quad i = 1, 2, \quad \Delta\bar{\boldsymbol{\psi}}_1 + \frac{\omega}{c_{s1}^2}\bar{\boldsymbol{\psi}}_1 = 0. \quad (29)$$

Подстановка представлений (28) в уравнения (27) после некоторых преобразований приводит к системе

$$\begin{aligned}\left[(H + C\tilde{B}_1)\Delta + \omega^2(\rho + \tilde{B}_1\rho_f)\right]\bar{\varphi}_1 + \left[(H + C\tilde{B}_2)\Delta + \omega^2(\rho + \tilde{B}_2\rho_f)\right]\bar{\varphi}_2 &= 0, \\ \left[(H + M\tilde{B}_1)\Delta + \omega^2(\rho_f + \tilde{B}_1\tilde{\rho}_m)\right]\bar{\varphi}_1 + \left[(H + C\tilde{B}_2)\Delta + \omega^2(\rho_f + \tilde{B}_2\tilde{\rho}_m)\right]\bar{\varphi}_2 &= 0.\end{aligned}\quad (30)$$

Для скалярных потенциалов $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$ и отдельного уравнения

$$\mu\Delta\bar{\boldsymbol{\psi}}_1 = -\omega^2\bar{\boldsymbol{\psi}}_1\frac{\rho\tilde{\rho}_m - \rho_f^2}{\tilde{\rho}_m},$$

для векторного потенциала $\bar{\boldsymbol{\psi}}_1 = \mathbf{j}\bar{\boldsymbol{\psi}}_1$, где

$$\tilde{\rho}_m = \rho_m - \frac{i}{\omega}\frac{\eta}{\varkappa}F(\omega^{1/2}). \quad (31)$$

Для удовлетворения системы (30) коэффициенты \tilde{B}_1 и \tilde{B}_2 должны выбираться так, чтобы выполнялись условия

$$c_{pi}^2 = \frac{C + \tilde{B}_i M}{\rho_f + \tilde{B}_i \tilde{\rho}_m} = \frac{H + \tilde{B}_i C}{\rho + \tilde{B}_i \rho_f}, \quad i = 1, 2, \quad (32)$$

где c_{pi} — комплексные скорости двух продольных мод в среде Био. Комплексные скорости продольных и поперечной мод вычисляются по формулам (5), в которых параметр ρ_m заменяется на комплексную функцию $\tilde{\rho}_m$ из (31). Из (32) следуют соотношения

$$\tilde{B}_i = \frac{C + \rho_f c_i^2}{\tilde{\rho}_m c_{pi}^2 - M} = \frac{H - \rho c_i^2}{\rho_f c_{pi}^2 - C}, \quad i = 1, 2,$$

которые формально совпадают с равенствами (7), но содержат теперь комплексные частотно-зависимые скорости $c_i = c_i(\omega)$ и функцию $\tilde{\rho}_m = \tilde{\rho}_m(\omega)$.

В пространственной области $z < 0$ потенциалы $\bar{\varphi}_0$ и $\bar{\psi}_0$ для полупространства $\nu = 0$ будем задавать в безразмерных координатах (11) в виде плоско-волновых представлений

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\varphi}_0 \\ \bar{\psi}_0 \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} X_0 e^{\kappa(z+h)\alpha_0} + X_0^\circ e^{-\kappa(z+h)\alpha_0} \\ i[Y_0 e^{\kappa(z+h)\beta_0} + Y_0^\circ e^{-\kappa(z+h)\beta_0}] \end{array} \right\} e^{-i\kappa x \zeta},$$

и потенциалы $\tilde{\varphi}_j$ ($j = 1, 2$), $\tilde{\psi}_1$ для среды $\nu = 1$ определять равенствами

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\varphi}_j \\ \tilde{\psi}_1 \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} X_j \cosh(\kappa z \alpha_j) \\ iY \sinh(\kappa z \beta) \end{array} \right\} e^{-i\kappa x \zeta},$$

в симметричном случае, и

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\varphi}_j \\ \tilde{\psi}_1 \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} X_j \sinh(\kappa z \alpha_j) \\ iY \cosh(\kappa z \beta) \end{array} \right\} e^{-i\kappa x \zeta}.$$

в антисимметричном случае.

Проведение дальнейших вычислений в случаях граничных условий контакта с проскальзыванием (8) и жесткого контакта (26) приводят к дисперсионным уравнениям, которые формально имеют такой же вид, как полученные ранее симметричные и антисимметричные уравнения для моделей пористого слоя Био без диссипации. Однако в случае диссипационной модели эти уравнения будут содержать комплексные и частотно-зависимые коэффициенты. В результате этого особые корни дисперсионных уравнений не будут иметь вещественных значений, за исключением случая $\omega \rightarrow \infty$, а связанные с ними волновые моды получат некоторое дополнительное затухание.

Исследования известных частотно-зависимых механизмов диссипации в рамках модели Био [11] показывают, что в области сейсмических частот в пористой среде Био распространяются только быстрая продольная и поперечная волны, а вторая продольная мода является диффузионной. Она становится распространяющейся волной только на достаточно высоких частотах (> 10 кГц). Поэтому можно ожидать, что в области низких частот волновые поля, возбуждаемые в модельных средах, содержащих пористый слой Био с диссипацией, и «эквивалентных» чисто упругих средах, будут иметь в основном одинаковые волновые элементы и их особенности. Близость характера волнового поля в случае модели чисто упругого слоя и упруго-пористого слоя Био между упругими полупространствами иллюстрируется результатами численного моделирования. Модельные расчеты волновых полей выполнены для «трехслойной» среды $\nu = 0, 1, 2$, состоящей из упруго-пористого слоя Био ($\nu = 1$), описываемого уравнениями (27), при выполнении на границах с упругими полупространствами ($\nu = 0, 2$) условий контакта проскальзывания (8), либо жесткого контакта (26). Для характеристики пористого слоя Био задавались следующие величины: модуль всестороннего сжатия флюида (воды) $K_f = 2.25$ ГПа, модуль всестороннего сжатия частиц материала каркаса $K_r = 31.0$ ГПа, модуль всестороннего сжатия пористого вещества $K = 4.58$ ГПа, модуль сдвига каркаса $\mu = 3.17$ ГПа, плотность флюида $\rho_f = 1$ г/см³, плотность вещества каркаса $\rho_s = 2.2$ г/см³, коэффициент пористости $\phi = 0.25$, проницаемость $\varkappa = 2.5 \cdot 10^{-15}$ м², вязкость жидкости $\eta = 0,001$ кг/(м·с). Параметры H , C и M уравнений Био вычисляются по формулам [5]

$$M = \frac{K_r}{1 - K/K_r + \phi(K/K_r - 1)}, \quad C = \frac{1 - K/K_r}{M}, \quad H = (1 - K/K_r)C + K + 4/3\mu.$$

При таких параметрах пористого слоя скорости поперечной и быстрой продольной волн на частоте 40 Гц составляют $v_{s1} \approx 1260$ м/с, $v_{p1} \approx 2700$ м/с. Для полупространств $\nu = 0,2$ задавались следующие параметры: $v_{p\nu} = 2600$ м/с, $v_{s\nu} = 1200$ м/с, $\rho_\nu = 2.2$ г/см³.

Для сейсмической практики могут представлять интерес резонансные явления в волновом поле, связанные с особенностями поведения корней дисперсионных уравнений рассматриваемой модели среды в случае наличия контакта с проскальзыванием. Упомянутые резонансные явления в чисто упругих средах ранее исследовались в работах [7–9]. Одной из особенностей, рассмотренной в [7, 8], является возможность возбуждения в упругом слое колебаний типа стоячих волн, которые описываются простым дисперсионным уравнением $\sin \kappa_n = 0$ и испытывают резонанс на частоте отсечки $\kappa_n \equiv \frac{\omega_n 2h}{v_s} = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$ [7, 9]. Такие волновые колебания образуются в слое при расположении источника возбуждения на достаточно большом (по сравнению с длиной волны) удалении по вертикали H_0 до кровли слоя и регистрации поля в области относительно малых горизонтальных удалений ($r \sim H_0$). Возбуждение подобных колебаний в пористом слое Био иллюстрируется на рис. 1, где представлены сейсмограммы вертикальной и горизонтальной компонент волнового поля, регистрируемые во внутренних точках среды вдоль вертикального профиля наблюдения. Источник расположен в верхнем полупространстве на удалении по вертикали до кровли слоя $H_0 = 1000$ м и на расстоянии до профиля наблюдения $r = 500$ м; мощность слоя $2h = 30$ м. При вычислениях использовался импульс с доминирующей частотой $f = 40$ Гц. Для удобства

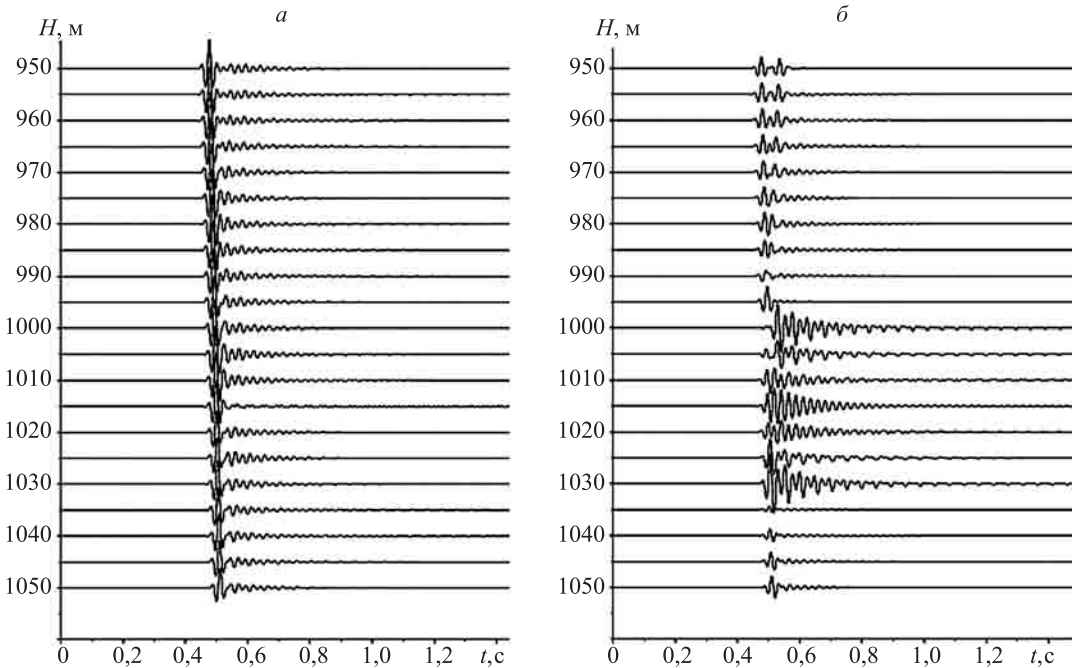


Рис. 1. Сейсмограммы вертикальной (а) и горизонтальной (б) компонент волнового поля, регистрируемые во внутренних точках среды вдоль вертикального профиля наблюдения

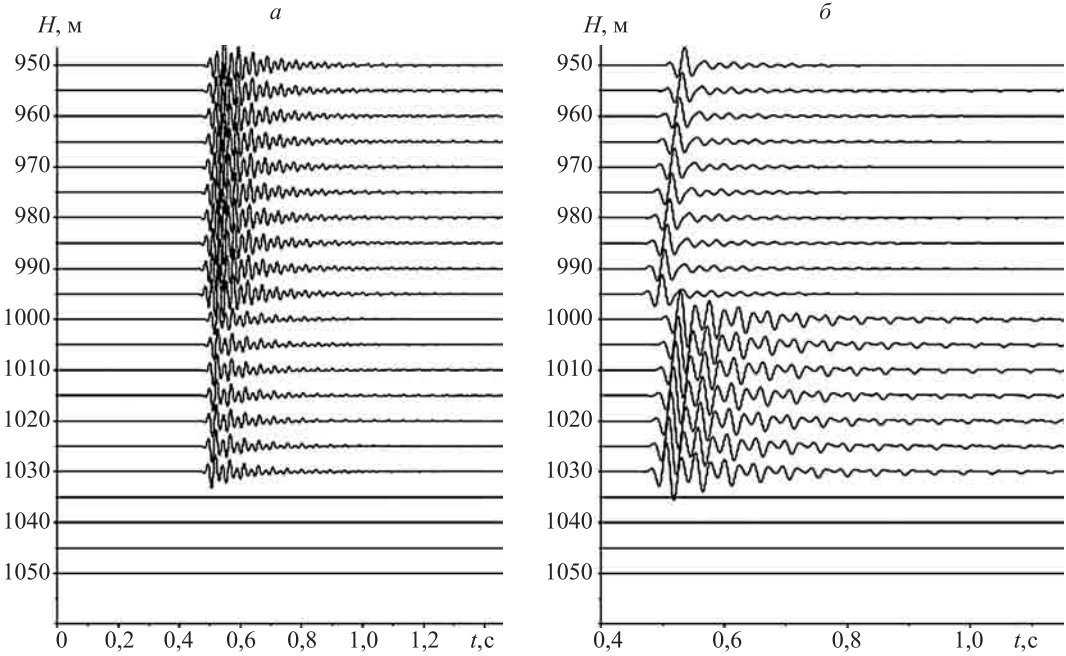


Рис. 2. Вертикальная компонента поля отраженных продольных волн (а) и горизонтальная компонента поля поперечных волн (б)

интерпретации полного волнового поля отдельно на рис. 2 представлены его составляющие: вертикальная компонента поля отраженных продольных волн (рис. 2, а) и горизонтальная компонента поля поперечных волн (рис. 2, б). Из такого расчленения видно, что интерференционные колебания формируются внутри слоя за счет поля поперечных (обменных) волн, и это поле может переизлучаться во вмещающую среду посредством обмена на границах слоя в поле продольных волн. На рис. 3 показаны кривые амплитудных спектров поперечной составляющей отраженного волнового поля, вычисленные для горизонтальных удалений r , равных 10, 500 и 1000 м. Относительные интенсивности модулей амплитудного спектра составляют соответственно 0.005 ($r=10$ м), 0.037 ($r=500$ м) и 0.015 ($r=1000$ м). Пики на кривых амплитудных спектров при минимальном удалении ($r=10$ м) указывают значения частот вступления колебаний первых трех мод, описываемые формулой $f_n = \frac{nv_s}{2h}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Другой из отмеченных в [8, 9] особенностей является возбуждение источником, расположенным внутри слоя с проскальзыванием на границах, волн типа Кг. Теоретическое описание этих волны было дано в работах П. В. Крауклиса [11, 12]. Образование волн типа Кг в рассматриваемой модели пористого слоя Био с контактом проскальзывания на границах показано на рис. 4, где приводятся сейсмограммы горизонтальной (рис. 4, а) и вертикальной (рис. 4, б) компонент волнового поля, регистрируемые в точках вертикального профиля наблюдения. Расчеты выполнены для случая расположения точечного источника на срединной плоскости слоя при удалении r вертикального профиля наблюдения на 500 м. Дополнительно на рис. 5 и 6 представлены сейсмограммы

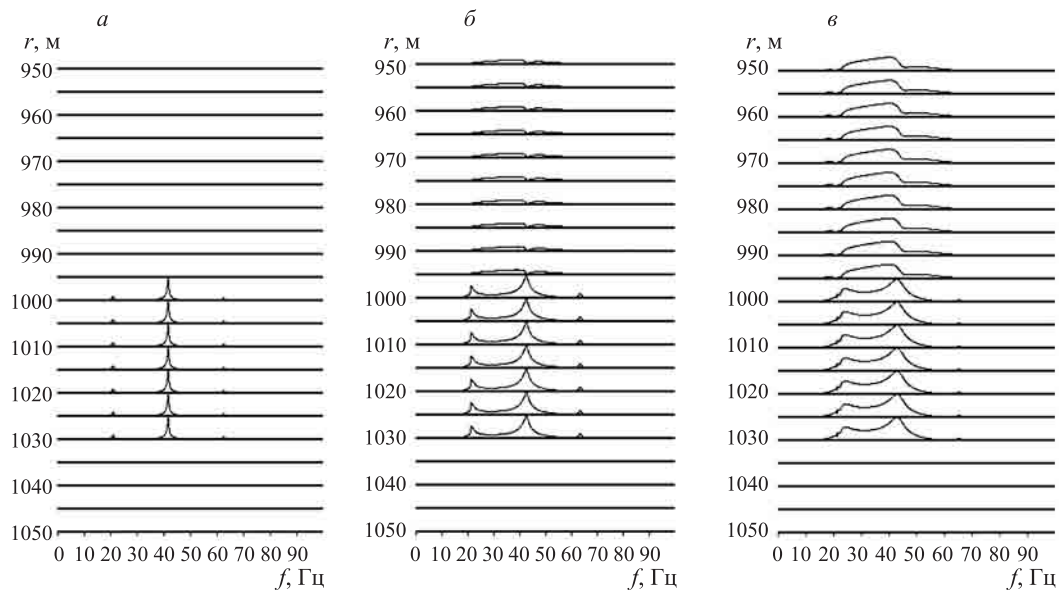


Рис. 3. Кривые амплитудных спектров поперечной составляющей отраженного волнового поля, вычисленные для горизонтальных удалений r : а — 10 м; б — 500 м; в — 1000 м

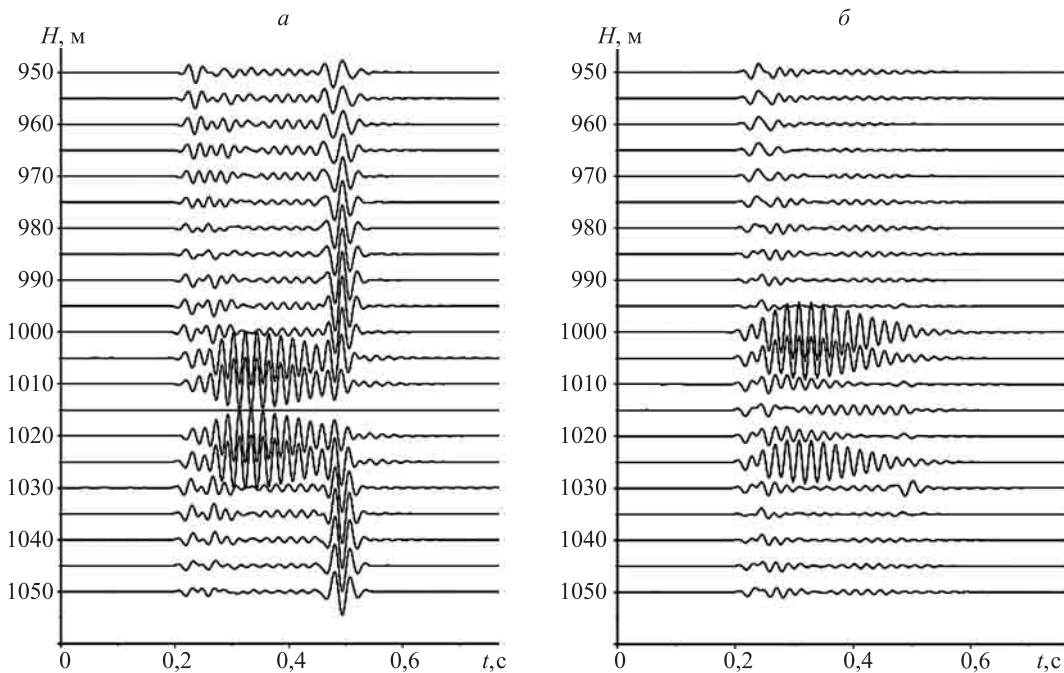


Рис. 4. Сейсмограммы горизонтальной (а) и вертикальной (б) компонент волнового поля, регистрируемые в точках вертикального профиля наблюдения

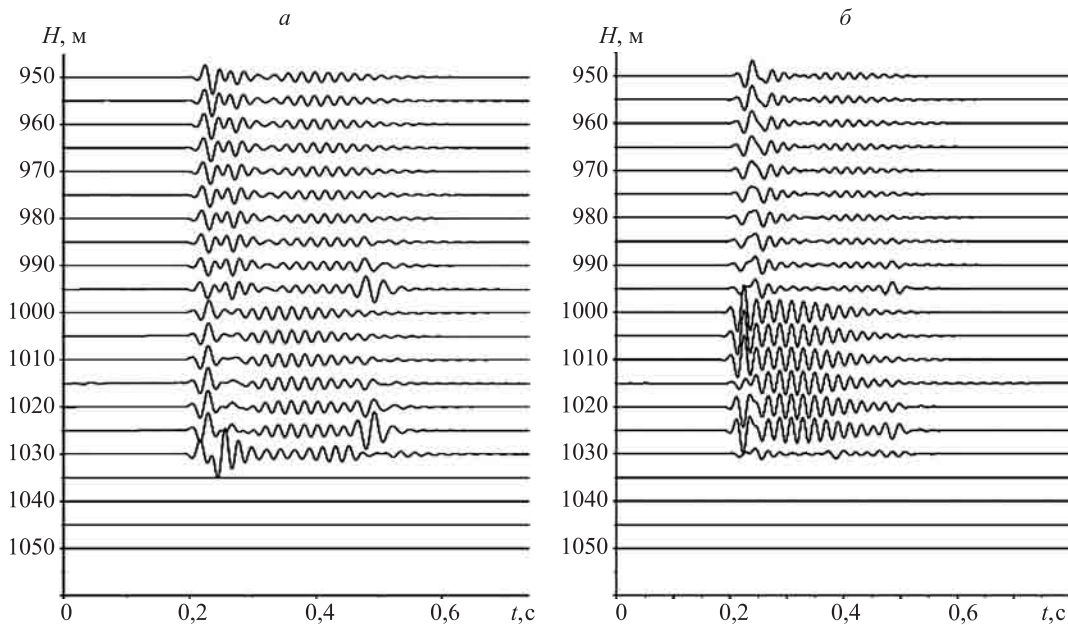


Рис. 5. Сейсмограммы вертикальной (а) и горизонтальной (б) компонент продольных волновых полей

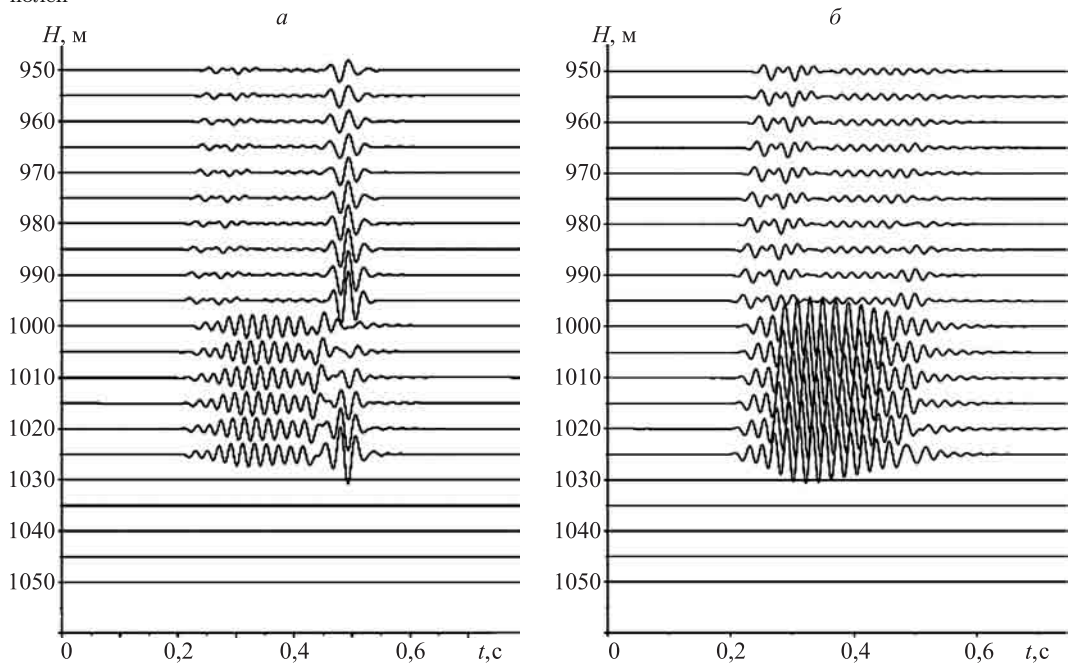


Рис. 6. Сейсмограммы вертикальной (а) и горизонтальной (б) компонент поперечных отраженных волновых полей

мы вертикальной и горизонтальной компонент продольных и поперечных отраженных волновых полей соответственно. Значения резонансных частот, связанных с формированием Кг-мод, определяются формулой [11]: $f_n^{(Kr)} = \frac{nv_{s1}}{2h\sqrt{1-\gamma^2}}$, $n = 1, 2, \dots$, где $\gamma = v_{s1}/v_{p1}$. Частота вступления первой моды Кг при заданных значениях параметров слоя $f_{n=1}^{(Kr)} \approx 48.3$ Гц согласуется с положением пиков на кривых амплитудных спектров (рис. 7), вычисленных по полю отраженных поперечных волн (см. рис. 6, б). В случае жесткого контакта на границах, как пористого, так и непористого слоя, волновые явления, подобные указанным выше, не возникают.

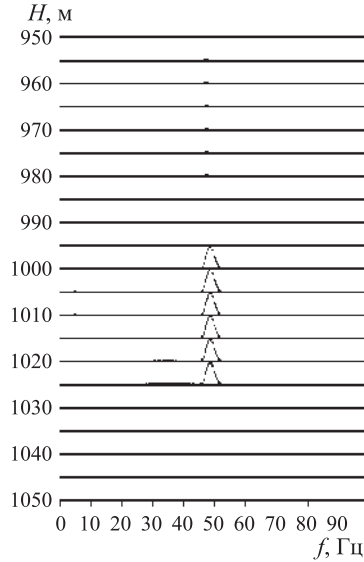


Рис. 7. Положение пиков на кривых амплитудных спектров, вычисленные по полю отраженных поперечных волн

Приведенные результаты вычислений волновых полей хорошо (качественно) согласуются с данными моделирования для аналогичных чисто упругих моделей сред в работах [8, 9] и свидетельствуют о том, что в области низких частот модель с диссипативным пористым слоем Био проявляет в целом те же свойства, что и чисто упругая модель.

Указатель литературы

1. Biot M. A. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media // J. Acoust. Soc. Amer. 1962. Vol. 34, N 9. P. 1254–1264.
2. Петрашень Г. И., Решетников В. В. Разработка инженерных подходов к изучению интерференционных волновых полей, возбуждающихся в пачках тонких упругих слоев. (I). (Возбуждение волновых полей типа SV и обсуждение рациональных методов их количественной оценки) // Записки научных семинаров ПОМИ. 1999. Т. 253. С. 12–136.
3. Santos J. E., Corbero J. M., Ravazzoli C. L., Hensley J. L. Reflection and transmission coefficients in fluid-saturated porous media // J. Acoust. Soc. Am. 1992. Vol. 91. P. 1911–1923.

4. *Молотков Л. А.* Исследования низкочастотных нормальных волн в слое Био, окруженном упругой средой // Записки научных семинаров ПОМИ. 2009. Т. 369. С. 110–126.
5. *Молотков Л. А.* Исследования распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. СПб.: Наука, 2001. 347 с.
6. *Молотков Л. А.* Распространение волн в пористом слое Био с закрытыми порами на границах // Записки научных семинаров ПОМИ. 2008. Т. 354. С. 173–189.
7. *Решетников В. В., Ковтун Ал. А.* Исследования корней дисперсионных уравнений эталонных моделей слоистых упругих сред с контактом проскальзывания на границах // Вопросы геофизики. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2011. Вып. 43. С. 18–42.
8. *Ковтун А. А.* Численные исследования волновых полей в моделях сред, содержащих границы разделов с контактом проскальзывания // Вопросы геофизики. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2008. Вып. 41. С. 3–19.
9. *Ковтун А. А.* Об особенностях сейсмического волнового поля в области низких частот в случае тонкослоистых упругих сред с контактом проскальзывания на границах // Вопросы геофизики. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. Вып. 42. С. 28–40.
10. *Muller T., Gurevich B., Lebedev M.* Seismic wave attenuation and dispersion resulting from wave-induced flow in porous rocks — A review // Geophysics. 2010. Vol. 75, N 5. P. 75A147–75A164.
11. *Краужлис П. В., Краужлис Л. А.* Об одном типе волн в средах, содержащих поверхности ослабленного механического контакта // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1988. Т. 173. С. 113–122.
12. *Краужлис П. В., Краужлис А. П., Фатьянов А. Г.* Резонансные волны в средах с ослабленными границами // Записки научных семинаров ПОМИ. 2008. Т. 354. С. 150–156.