

Ю. В. Киселев, В. Н. Троян

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СЕЙСМИЧЕСКОГО И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

Введение

Геофизическая дифракционная томография является методом восстановления параметров среды, использующим в качестве исходных данных полное волновое поле. Метод позволяет восстанавливать пространственное распределение искоемых параметров среды с высоким разрешением [2, 3]. Сейсмические и электромагнитные волны, используемые в качестве зондирующего поля, могут нести информацию о сейсмических параметрах и электрической проводимости подземной среды [2, 5, 6].

В работе рассматриваются результаты численного моделирования восстановления модуля сдвига μ и электрической проводимости σ , при этом в качестве зондирующих волновых полей используются нестационарные упругие поперечные волны и низкочастотные электромагнитные волны соответственно. Восстановление параметров осуществляется методом дифракционной томографии в приближении Борна первого порядка с применением итерационного подхода, что позволяет повысить точность восстановления искоемых параметров. Прямые задачи на распространение упругих и электромагнитных волн в низкочастотном приближении решаются для двумерных задач конечно-разностным методом.

Метод дифракционной томографии при восстановлении параметров Ламе, массовой плотности (и скоростей распространения упругих волн) с использованием упругого зондирующего волнового поля, в приближении Борна первого порядка позволяет восстанавливать не слишком слабоконтрастные неоднородности размером порядка доминирующей длины зондирующего сигнала [1]. При этом относительная ошибка восстановления оказывается приближенно равной отношению величины возмущения параметра к величине такого параметра для опорной среды. В [1] максимальная контрастность неоднородности по скорости распространения продольных волн равна 0.5.

Примеры численного моделирования восстановления локальных неоднородностей электрической проводимости методом дифракционной томографии представлены в [5]. При этом восстановление возмущения электрической проводимости $\sigma = 10^{-4}$ См/м в опорной среде с таким же значением электрической проводимости с использованием нестационарного зондирующего сигнала с частотой 10 Гц приводит к ошибке восстановления порядка 50 %.

1. Постановка задачи и алгоритм численного моделирования

Восстановление упругой неоднородности. В качестве модели среды рассмотрим неоднородное полупространство со свободной поверхностью. В случае двумерной SH-задачи в декартовой системе координат $(x, y, z; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ компонента $\varphi \equiv \varphi(x, z, t)$

волнового поля $\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t)\mathbf{e}_2$ внутри областей с гладким изменением модуля сдвига μ и массовой плотности ρ удовлетворяют уравнению

$$\mu\Delta\varphi + (\nabla\mu \cdot \nabla\varphi) + \hat{f} = \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \quad (\hat{f} \equiv \hat{f}(x_s, z_s, t) = \delta(x - x_s)\delta(z - z_s)f(t)), \quad (1)$$

где (x_s, z_s) — положение источника; $f(t)$ — временная зависимость источника волнового поля. Граничное условие на свободной поверхности

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0} = 0. \quad (2)$$

Введем разности $\delta\mu(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \mu_{\text{rf}}(\mathbf{x})$ и $\delta\rho(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) - \rho_{\text{rf}}(\mathbf{x})$ величин $\mu(\mathbf{x})$ и $\rho(\mathbf{x})$ для искомой среды, в которой распространяется волновое поле φ

$$L\varphi = -\hat{f}, \quad (L\varphi \equiv \mu\Delta\varphi + (\nabla\mu \cdot \nabla\varphi) - \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}) \quad (3)$$

и величин $\mu_{\text{rf}}(\mathbf{x})$ и $\rho_{\text{rf}}(\mathbf{x})$ для известной опорной среды, в которой распространяется волновое поле φ_{rf}

$$L_{\text{rf}}\varphi_{\text{rf}} = -\hat{f}, \quad (L_{\text{rf}}\varphi_{\text{rf}} \equiv \mu_{\text{rf}}\Delta\varphi_{\text{rf}} + (\nabla\mu_{\text{rf}} \cdot \nabla\varphi_{\text{rf}}) - \rho_{\text{rf}}\frac{\partial^2\varphi_{\text{rf}}}{\partial t^2}). \quad (4)$$

В предположении малости величин $\delta\mu$ и $\delta\rho$ можно записать приближенное равенство

$$L_{\text{rf}}\delta\varphi \approx -\delta L\varphi_{\text{rf}}, \quad (5)$$

где $\delta\varphi = \varphi - \varphi_{\text{rf}}$ — разностное поле. Правая часть (5)

$$\delta L\varphi_{\text{rf}} = \nabla(\delta\mu\nabla\varphi_{\text{rf}}) - \delta\rho\frac{\partial^2\varphi_{\text{rf}}}{\partial t^2} \quad (6)$$

может рассматриваться как источник разностного поля. Запишем выражение для разностного поля $\delta\varphi$ в точке наблюдения $\mathbf{x} = \mathbf{x}_r$ в виде

$$\delta\varphi(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) = \int_S \int_0^\infty \varphi_{\text{out}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, t - \tau) \delta L\varphi_{\text{in}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \tau) d\tau d\mathbf{x}, \quad (7)$$

где S — область среды, подлежащая восстановлению; $\varphi_{\text{in}}, \varphi_{\text{out}}$ — решения уравнений

$$L_{\text{rf}}\varphi_{\text{in}} = -\hat{f}, \quad L_{\text{rf}}\varphi_{\text{out}} = -\hat{f}_{\text{out}} \quad (\hat{f}_{\text{out}} = \delta(x - x_r)\delta(z - z_r)\delta(t)). \quad (8)$$

Введем томографические функционалы $p_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t)$ и $p_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t)$:

$$\begin{aligned} p_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) &= - \int_0^\infty \varphi_{\text{out}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, t - \tau) \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \varphi_{\text{in}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \tau) d\tau, \\ p_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) &= - \int_0^\infty (\nabla\varphi_{\text{out}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, t - \tau) \nabla\varphi_{\text{in}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь запишем (7) в виде

$$\delta\varphi(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) = \int_S [\delta\mu(\mathbf{x})p_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) + \delta\rho(\mathbf{x})p_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t)]d\mathbf{x}. \quad (10)$$

В предположении линейной зависимости $\delta\rho = c\delta\mu$ между ρ и μ (если известно c)

$$\delta\varphi(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) \approx \int_S [p_\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) + p_\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t)c]\delta\mu(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \quad (11)$$

После дискретизации интегрального уравнения (11) систему линейных уравнений для определения величин μ (вектор δ_μ) запишем в виде

$$P\delta_\mu = \delta_\varphi, \quad (12)$$

где δ_φ — дискретное представление рассеянного волнового поля.

Окончательно система линейных уравнений после введения регуляризации имеет следующий вид:

$$[P'P + \alpha_1(B'_x B_x + B'_z B_z) + \alpha_2 C'C + \alpha_3 D'D]\delta_\mu = P'\delta_\varphi, \quad (13)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — коэффициенты регуляризации. Матрицы B_x и B_z — конечно-разностные аналоги частных производных второго порядка по переменным x и z соответственно; C — штрафная матрица на отличные от нуля значения искомого параметра в граничных точках области восстановления; S, D — штрафная матрица на отличные от нуля значения искомого параметра вблизи граничных точек области восстановления.

Итерационный алгоритм состоит в последовательном вычислении величин $\delta\mu$. На каждом шаге предполагается известной опорная среда. Решение прямых задач на распространение волн в опорной среде позволяет построить томографический функционал (9). Искомые величины $\delta\mu$ находятся решением системы линейных уравнений (13). Теперь итерационный процесс может быть остановлен, если, например, найденные величины $\delta\mu$ могут рассматриваться как малые, или продолжен. В случае продолжения, величины $\delta\mu$ используются для создания новой опорной среды и выполняется следующий шаг итерационного процесса.

Восстановление неоднородности электрической проводимости. Численное моделирование восстановления локальных неоднородностей электрической проводимости $\sigma = \sigma(\mathbf{x})$, расположенной в однородном пространстве (электрическая проводимость $\sigma = \text{const}$, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon' = \varepsilon\varepsilon_0 = \text{const}$, магнитная проницаемость $\mu' = \mu\mu_0 = \text{const}$), выполнено для случая низкочастотного зондирующего сигнала. Электрическое $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ и магнитное $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$ поля в проводящей среде, возбужденные точечным током с плотностью $\mathbf{j}_{ex} = \mathbf{j}_{ex}(\mathbf{x}, t)$, расположенным в точке $(\mathbf{x} = \mathbf{x}_s)$ декартовой системы координат $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, описываются уравнениями Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu' \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{ex}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

Электрическое поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ в среде, содержащей локальную неоднородность $\sigma = \sigma(\mathbf{x})$, может быть получено как решение следующего дифференциального уравнения в частных производных:

$$L\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}_{ex}, \quad L\mathbf{E} \equiv \frac{1}{\mu'}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Опорная среда предполагается известной (σ_{rf}), и электрическое поле \mathbf{E}_{rf} удовлетворяет уравнению

$$L_{\text{rf}}\mathbf{E}_{\text{rf}} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}_{\text{ex}}, \quad L_{\text{rf}}\mathbf{E}_{\text{rf}} \equiv \frac{1}{\mu'}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_{\text{rf}} + \sigma_{\text{rf}}\frac{\partial \mathbf{E}_{\text{rf}}}{\partial t}.$$

Предположим, что величина возмущения $\delta\sigma = \sigma - \sigma_{\text{rf}}$ такова, что можно написать приближенное равенство

$$L_{\text{rf}}\delta\mathbf{E} \approx -\delta L\mathbf{E}_{\text{rf}},$$

где $\delta\mathbf{E} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{\text{rf}}$ — разностное поле. Таким образом, выражение

$$\delta L\mathbf{E}_{\text{rf}} = \delta\sigma\frac{\partial \mathbf{E}_{\text{rf}}}{\partial t}$$

можно рассматривать как источник разностного поля. Компоненты разностного поля δE_i ($i = 1, 3$) запишем в виде

$$\delta E_i(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) = \int_S \int_0^\infty \tilde{\mathbf{E}}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, t - \tau) \cdot \delta L\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \tau) d\tau d\mathbf{x}.$$

Волновые поля $\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, t)$ и $\tilde{\mathbf{E}}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, t)$ удовлетворяют соответственно следующим уравнениям:

$$L_{\text{rf}}\mathbf{E} = -\hat{\mathbf{f}} = \delta(z - z_s)f(t)\mathbf{e}_1 \quad \text{и} \quad L_{\text{rf}}\tilde{\mathbf{E}}_i = -\hat{\mathbf{f}}_i \quad (i = 1, 3), \quad (14)$$

где источник $\hat{\mathbf{f}}_i$ определяется следующей формулой:

$$\hat{\mathbf{f}} \equiv \hat{\mathbf{f}}_i \equiv \hat{\mathbf{f}}_i(x_r, z_r, t) = \delta(x - x_r)\delta(z - z_r)\delta(t)\mathbf{e}_i.$$

Вводя томографические функционалы

$$p_i^\sigma(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s, t) = \int_0^\infty \tilde{\mathbf{E}}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, t - \tau) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau}\mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \tau) d\tau, \quad (15)$$

компоненты разностного поля запишем в виде

$$\delta E_i(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) \equiv \delta E_i = \int_S \delta\sigma p_i^\sigma d\mathbf{x}. \quad (16)$$

После дискретизации (16) получим систему линейных уравнений

$$\mathbf{P}\mathbf{d}_\sigma = \mathbf{d}_E \quad (17)$$

для нахождения вектора \mathbf{d}_σ , элементы которого являются искомыми величинами $\delta\sigma(\mathbf{x})$. Здесь \mathbf{d}_E — дискретные по времени компоненты волнового поля, рассеянного неоднородностью. Окончательный вид системы линейных уравнений после введения регуляризации совпадает с системой линейных уравнений (13).

Итерационный алгоритм состоит в последовательном вычислении величин $\delta\sigma$. На каждом шаге предполагается известной опорная среда. Используя опорную среду, вычисляем томографический функционал (15). Решая систему линейных уравнений (17) (после приведения ее к виду, аналогичному (13)), находим $\delta\sigma$. Найденные поправки

$\delta\sigma$ позволяют получить новую модель среды, которую можно использовать в качестве опорной на следующем шаге итерационного алгоритма при продолжении итерационного процесса.

2. Результаты численного моделирования

Восстановление упругой неоднородности. Рассмотрим результаты численного моделирования на восстановление локальных неоднородностей с использованием итерационного алгоритма. Результаты восстановления модуля сдвига μ для двумерной задачи на распространение упругих волн сдвига представлены на рис. 1–3. Кажущаяся частота зондирующего сигнала (импульс Риккера) 25 Гц, при этом доминирующая длина волн сейсмических колебаний, распространяющихся в опорной среде со скоростью $v_s = \sqrt{\mu/\rho} = 1$ км/с, равна 0.04 км. Восстановление неоднородностей с контрастностью 0.44–1.25 для модуля сдвига μ (0.2–0.5 для v_s соответственно) выполнено по данным

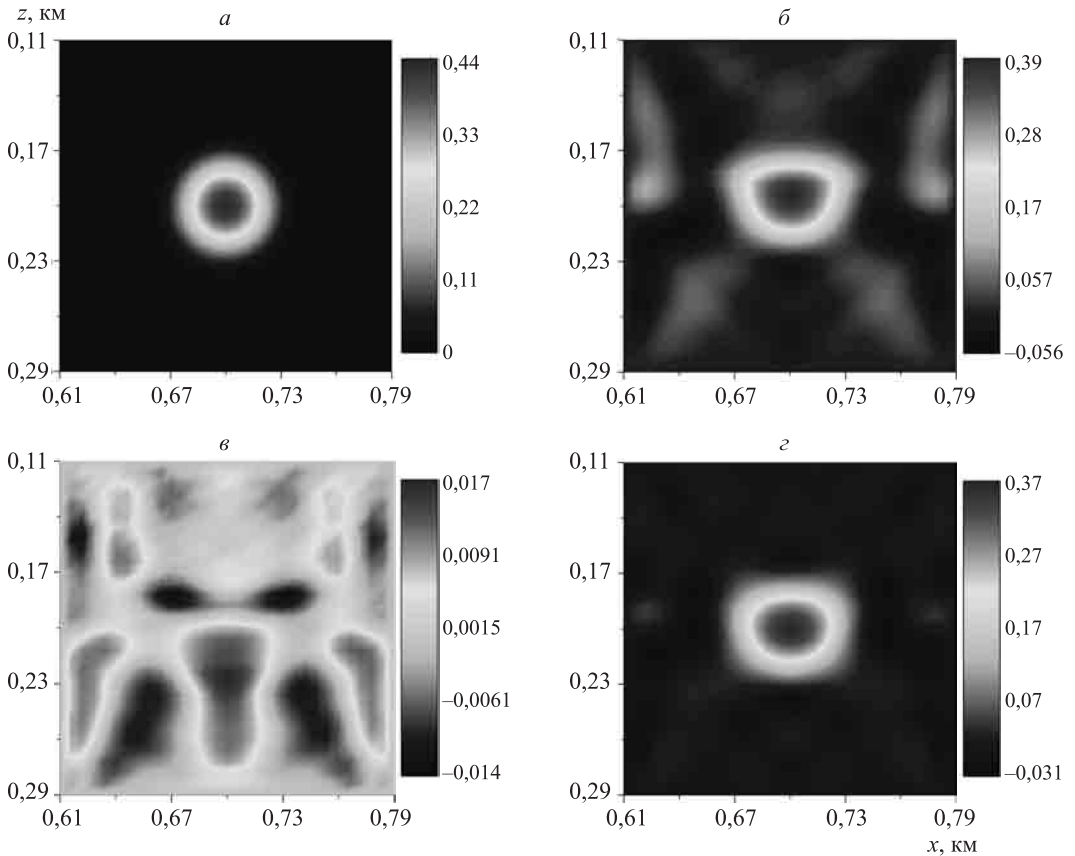


Рис. 1. Восстановление неоднородности размером порядка длины зондирующего сигнала и контрастностью 20 % для скорости поперечных волн v_s : а — модель среды, содержащей неоднородность; б, г — результаты восстановления после первого и третьего шагов соответственно; в — разность приращения модуля сдвига μ_s на третьем и втором шагах

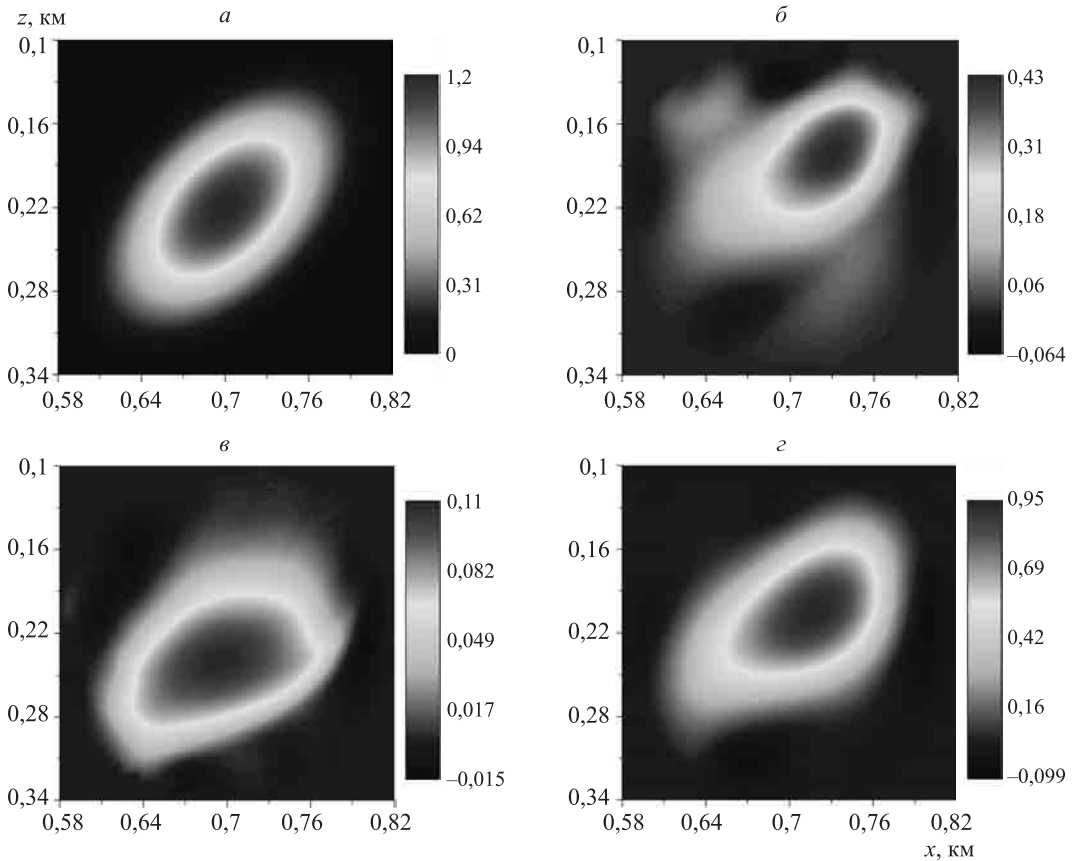


Рис. 2. Восстановление протяженной неоднородности с контрастностью 50 % для v_s : a — модель среды, содержащей неоднородность; $б, г$ — результаты восстановления после первого и четвертого шагов соответственно; $в$ — разность приращения модуля сдвига μ_s на четвертом и третьем шагах

обратного рассеяния. Источники и точки наблюдения расположены на свободной поверхности ($z = 0$), на линии наблюдений, совпадающей с осью x декартовой системы координат. Источник и точки наблюдения расположены в точках, равных 0.5, 0.7, 0.9 км. Для восстановления неоднородностей используется девять пар источник-приемник.

На рис. 1 представлены результаты восстановления неоднородности размером порядка длины волны зондирующего сигнала (после 1-го и 3-го шагов итерационной процедуры). После 2-го и 3-го шагов итерационного процесса относительная ошибка восстановления модуля сдвига μ не превышает 0.2, но после 3-го шага (рис. 1, $г$) положение максимума неоднородности ближе к его положению для модельной неоднородности, чем после первого (рис. 1, $б$).

Результаты первой и четвертой итераций при восстановлении протяженной неоднородности представлены на рис. 2. После первого (четвертого) шага итерационного алгоритма относительная ошибка восстановления неоднородности модуля сдвига $\mu = 0.65$ (0.24). После добавления к рассеянному неоднородностью волновому полю гауссовского

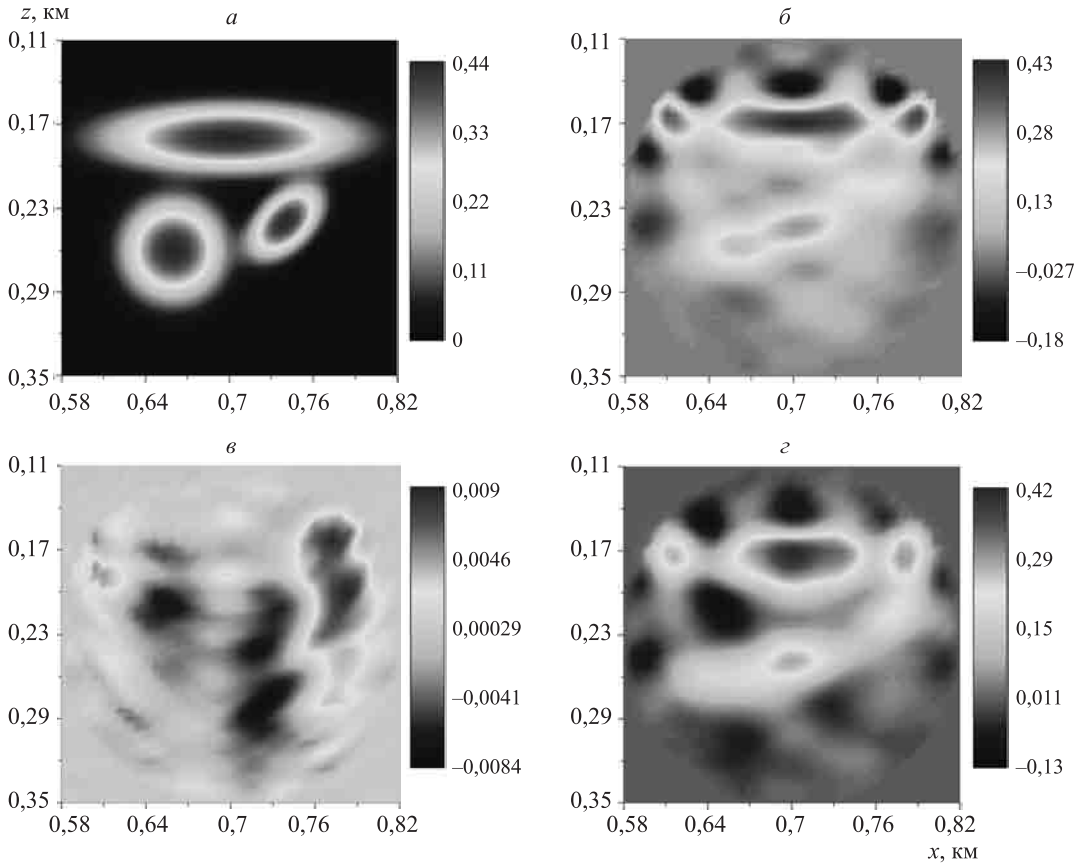


Рис. 3. Восстановление неоднородности со сложной геометрией с контрастностью 20 % для скорости поперечных волн v_s :

a — модель среды, содержащей неоднородность; b, d — результаты восстановления после первого и четвертого шагов соответственно; c — разность приращения модуля сдвига μ_s на четвертом и третьем шагах

шума со стандартным отклонением 0.1 от максимальной величины рассеянного поля относительная ошибка восстановления после четвертого шага возрастает до 0.34.

Восстановление неоднородности со сложной геометрией представлено на рис. 3.

Восстановление неоднородности электрической проводимости. Рассмотрим результаты восстановления неоднородности электрической проводимости в двумерном случае после одного шага определения величины возмущения опорной среды. Источник из правой части уравнения (14) генерирует нестационарную плоскую волну с кажущейся частотой 10 Гц и с отличной от нуля компонентой электрического поля E_1 . Модель среды и результаты восстановления представлены на рис. 4. Зондирующее плоское волновое поле распространяется в однородном пространстве с электрической проводимостью $\sigma = 10^{-4}$ См/м, содержащем неоднородность с максимальной электрической проводимостью и $\sigma = 10^{-4}$ См/м и 10 км соответственно (рис. 4, a). Центр неоднородности расположен в точке с координатами $x = 0$ км, $z = 10$ км, при этом расстояние

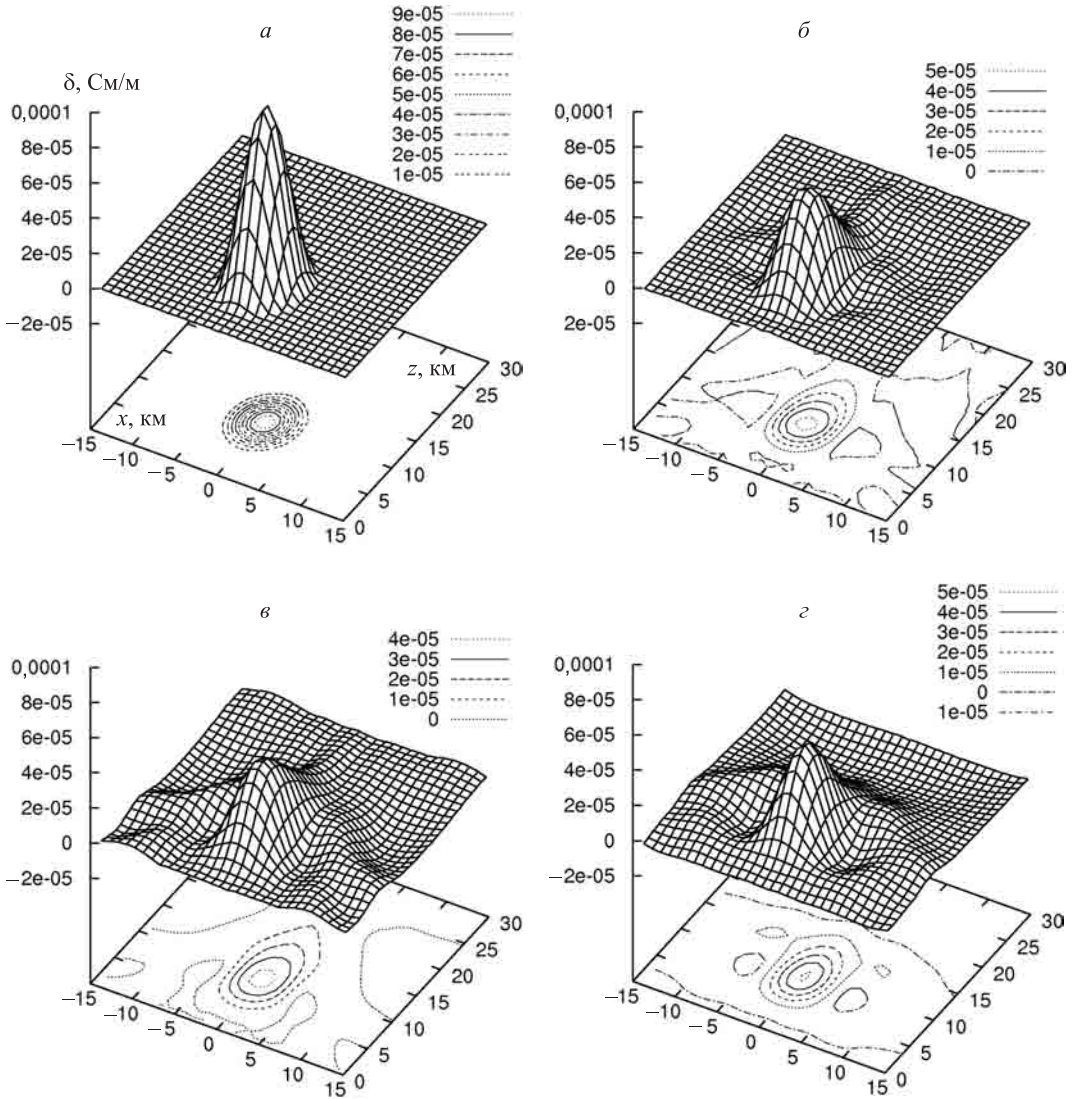


Рис. 4. Восстановление неоднородности электрической проводимости: *a* — модель неоднородности электрической проводимости; *б–г* — результаты восстановления с использованием 7 точек наблюдения ($x = -7.5, -5.0, -2.5, 0.0, 2.5, 5.0, 7.5$ км)

центра неоднородности от линии наблюдения ($z = 0$ км) равно 10 км. Восстановление с использованием метода дифракционной томографии и двух компонент (E_1 и E_3) электрического поля (рис. 4, *б*) дает ошибку восстановления порядка 50%. Восстановление с использованием E_1 и E_3 компонент представлено на рис. 4, *в* и рис. 4, *г* соответственно.

Результаты восстановления в одномерном случае с использованием итерационного алгоритма представлены на рис. 5. Восстановление выполнено с тем же самым зондиру-

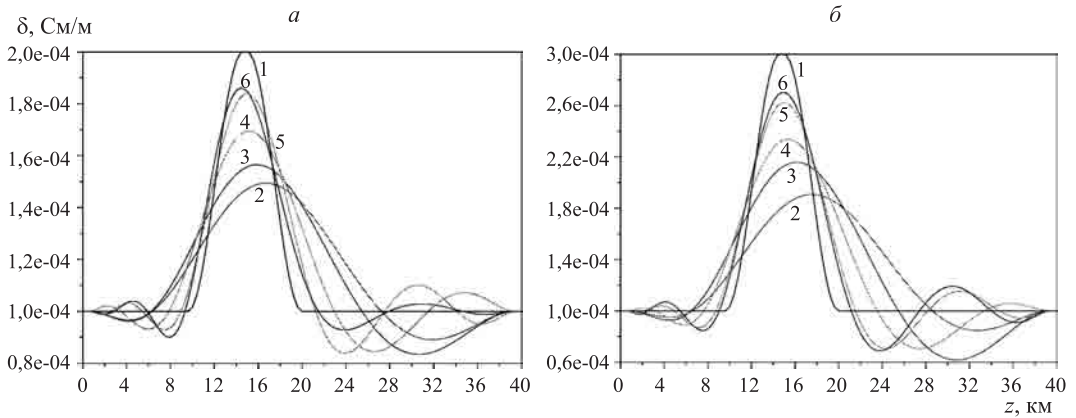


Рис. 5. Восстановление электрической проводимости с использованием итерационной процедуры при различной контрастности относительно опорной среды:

1 — модель неоднородности; 2–6 — кривые с номерами, равными числу итераций +1

ющим сигналом, что и предыдущее численное моделирование. Электрическая проводимость опорной среды $\sigma = 10^{-4}$ См/м. Наблюдение проводилось в точке $z = 0$. На рис. 5 представлены результаты восстановления неоднородностей с различным контрастом относительно опорной среды. Ошибка восстановления после пяти шагов итерационной процедуры менее 10 %.

Указатель литературы

1. Киселев Ю. В., Троян В. Н. Численное моделирование в задачах дифракционной томографии // Вопросы геофизики. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1998. Вып. 35. С. 25–38.
2. Рыжиков Г. А., Троян В. Н. Томография и обратные задачи дистанционного зондирования. СПб.: Изд-во СПбГУ. 1994. 220 с.
3. Devaney A. J. Reconstructive tomography with diffracting wave fields // Inverse Problems. Vol. 2. 1986. P. 161–183.
4. Kiselev Yu. V., Troyan, V. N. Numerical study of restoration of local elastic inhomogeneities by iterative approaches based on the diffraction tomography method. Proc.: of the International Seminar «Day on Diffraction 2004», St. Petersburg, Russia, June 29 – July 2, 2004. SPbU. 2004. P. 127–131.
5. Troyan V., Hayakawa M., Kiselev Yu. Restoration of seismic parameters and electrical conductivity by the diffraction tomography method // Physics and Chemistry of the Earth. Vol. 31, Issue 4–9. 2006. P. 268–272.
6. Zhdanov M. S. Electromagnetic geophysics: Notes from the past and the road ahead // Geophysics. Vol. 75. 2010. P. 75A49–75A66.