

А. Б. Проневич, С. Дель, Б. М. Каштан

ПОСТРОЕНИЕ МИГРАЦИОННЫХ ФОРМУЛ В ОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Введение

Дифрагированные волны несут важную информацию о структурных особенностях среды, представляющих большой интерес для сейсморазведки. Эту информацию можно использовать при построении сейсмических изображений геологических сред, в том числе изображений небольших объектов, а также можно получить подробную скоростную модель среды. Но до настоящего времени при построении сейсмических изображений (при миграции) зачастую полагалось, что рассматриваемая среда изотропна. Однако большинство изучаемых объектов включают анизотропию. Поэтому её необходимо учитывать при обработке и интерпретации сейсмических данных.

Наиболее часто используемым уравнением для расчета годографа дифрагированной волны является классическое уравнение «двойного квадратного корня (DSR equation)». Уравнение «двойного квадратного корня» получено в приближении, что проекция точки дифракции на поверхность совпадает с координатой точки прихода наибыстрого луча. Но такое упрощение не всегда верно для многих геологических моделей. На рис. 1 показаны точки дифракции в сильно анизотропной среде. Пунктирной линии соответствует дифракционный отклик в случае однородной изотропной среде. Как видно из рисунка, время хода наибыстрого луча совпадает с вертикальным и картинка симметрична относительно вертикальной оси. Сплошной линии соответствует дифракционный отклик в однородной эллиптически анизотропной среде. В этом случае время хода наибыстрого луча не совпадает с вертикальным. Наибыстрый луч приходит на поверхность под углом 35 град. Это указывает на то, что вершина годографа дифрагированной волны сдвинута вбок относительно положения точки дифракции.

Несмотря на то, что нет приближенного уравнения для годографа дифрагированной волны в анизотропной среде, в качестве последнего чаще всего используется выражение, полученное в [2] для годографа рефрагированной волны. Это приближение представляет собой обычное уравнение «двойного квадратного корня», разложенное до члена 4-го порядка. Однако это уравнение выведено в предположении, что наибыстрый луч совпадает с вертикальным. Но такое допущение, как говорилось выше, не всегда верно.

Мы предлагаем параметризовать уравнение годографа дифрагированной волны четырьмя параметрами: лучевым углом, соответствующим наибыстрому лучу, лучевой скоростью вдоль этого луча, первыми и вторыми производными лучевой скорости по отношению к их углу. Этих четырех независимых параметров достаточно для описания времен прихода дифрагированных волн в произвольной однородной анизотропной среде. Полученное приближение можно использовать также для параметризации оператора временной миграции.

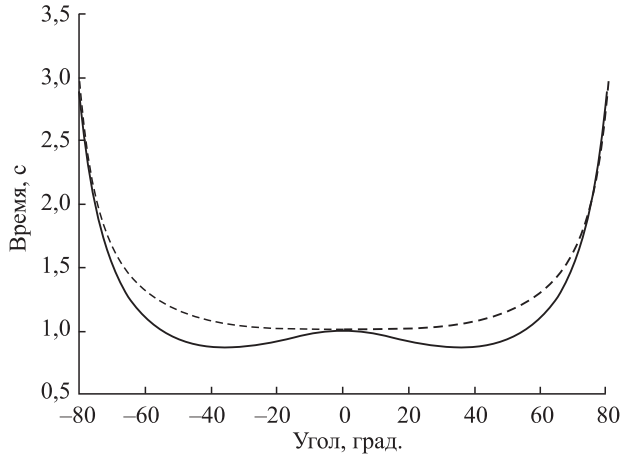


Рис. 1. График времени хода, когда точка дифракции находится в сильно анизотропной среде с вертикальной осью симметрии

1. Теория

Рассмотрим случай произвольной однородной анизотропной среды по схеме наблюдений, представленной на рис. 2, где x и z определяют положение дифрактора, находящегося под дневной поверхностью, x_0 — точка измерения на поверхности, куда луч приходит с наименьшим временем, и x_1, x_2 — координаты источника и приемника на дневной поверхности соответственно. Применив теорему Пифагора, получим время хода луча от источника к приемнику, т. е. от точки $x_1, z = 0$ через x, z до $x_2, z = 0$:

$$t = \frac{r_1}{\xi(\phi_1)} + \frac{r_2}{\xi(\phi_2)}, \quad (1)$$

где r_1 и r_2 — расстояние от дифрактора до источника и приемника соответственно; $\xi(\phi_{1,2})$ — лучевые скорости, соответствующие лучевым углам $\phi_{1,2}$. Введем смещение:

$$\delta x = x_0 - x.$$

Расстояния r_1 и r_2 выразим в следующем виде:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x - x_1)^2 + z^2} = \sqrt{\frac{t_0^2 \xi_0^2}{4} + (x_0 - x_1)^2 - 2\delta x(x_0 - x_1)}, \\ r_2 &= \sqrt{(x_2 - x)^2 + z^2} = \sqrt{\frac{t_0^2 \xi_0^2}{4} + (x_2 - x_0)^2 + 2\delta x(x_2 - x_0)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Разложим лучевую скорость в ряд Тейлора в окрестности луча с наибольшей скоростью по отношению к его углу. Для вычисления скорости прямого и обратного хода луча получим выражение:

$$\xi(\phi_1) \approx \xi(\phi_0) + \left. \frac{\partial \xi}{\partial \phi} \right|_{\phi_0} (\phi_1 - \phi_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \xi}{\partial \phi^2} \right|_{\phi_0} (\phi_1 - \phi_0)^2,$$

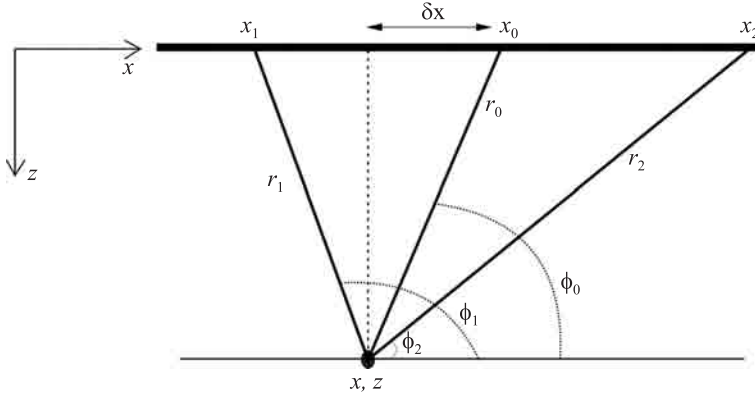


Рис. 2. Схема наблюдений

$$\xi(\phi_2) \approx \xi(\phi_0) + \left. \frac{\partial \xi}{\partial \phi} \right|_{\phi_0} (\phi_2 - \phi_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \xi}{\partial \phi^2} \right|_{\phi_0} (\phi_2 - \phi_0)^2. \quad (3)$$

Введем обозначения:

$$\xi(\phi_0) = \xi_0, \quad A = \left. \frac{\partial \xi}{\partial \phi} \right|_{\phi_0}, \quad B = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \xi}{\partial \phi^2} \right|_{\phi_0},$$

получаем следующее выражение для лучевых скоростей:

$$\begin{aligned} \xi(\phi_1) &\approx \xi_0(1 + A(\phi_1 - \phi_0) + B(\phi_1 - \phi_0)^2), \\ \xi(\phi_2) &\approx \xi_0(1 + A(\phi_2 - \phi_0) + B(\phi_2 - \phi_0)^2), \end{aligned} \quad (4)$$

которое подставляем в уравнение (1):

$$\begin{aligned} t = & \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + z^2}}{\xi_0(1 + A(\phi_1 - \phi_0) + B(\phi_1 - \phi_0)^2)} + \\ & + \frac{\sqrt{(x_2 - x)^2 + z^2}}{\xi_0(1 + A(\phi_2 - \phi_0) + B(\phi_2 - \phi_0)^2)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Полученное приближение зависит от координат точки дифракции, находящейся под дневной поверхностью (x, z) , координат источника и приемника $(x_1, z = 0)$, $(x_2, z = 0)$, первой и второй производной лучевой скорости по углу (A и B) изменения угла $\phi - \phi_0$, и лучевой скорости наибоыстрого луча ξ_0 . Но это приближение сложно реализовать на практике при обработке сейсмических данных. Поэтому введем временное приближение для годографа дифрагированной волны.

2. Временное приближение для годографа дифрагированной волны

Временное приближение для годографа дифрагированной волны получим, выразив координаты x , z через время хода наибоыстрого луча t_0 . По теореме Пифагора

$$t_0 = \frac{2}{\xi_0} \sqrt{(x - x_0)^2 + z^2}, \quad (6)$$

где $\xi_0 = \xi(\phi_0)$ — лучевая скорость наибоыстрого луча.

Представим члены $x - x_1$ и $x_2 - x$ следующим образом:

$$(x - x_1)^2 = \delta x^2 + (x_0 - x_1)^2 - 2\delta x(x_0 - x_1),$$

$$(x - x_2)^2 = \delta x^2 + (x_2 - x_0)^2 + 2\delta x(x_2 - x_0).$$

Подставим в уравнение (1):

$$t = \frac{1}{\xi(\phi_1)} \sqrt{\delta x^2 - 2\delta x(x_0 - x_1) + (x_0 - x_1)^2 + z^2} + \frac{1}{\xi(\phi_2)} \sqrt{\delta x^2 + 2\delta x(x_2 - x_0) + (x_2 - x_0)^2 + z^2}. \quad (7)$$

Используя уравнение (6), получим

$$t = \frac{1}{\xi(\phi_1)} \sqrt{(x_0 - x_1)^2 - 2\delta x(x_0 - x_1) + \frac{t_0^2 \xi_0^2}{4}} + \frac{1}{\xi(\phi_2)} \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + 2\delta x(x_2 - x_0) + \frac{t_0^2 \xi_0^2}{4}}. \quad (8)$$

Выносим ξ_0 :

$$t = \frac{\xi_0}{\xi(\phi_1)} \sqrt{\frac{t_0^2}{4} + \frac{(x_0 - x_1)^2}{\xi_0^2} - \frac{2\delta x(x_0 - x_1)}{\xi_0^2}} + \frac{\xi_0}{\xi(\phi_2)} \sqrt{\frac{t_0^2}{4} + \frac{(x_2 - x_0)^2}{\xi_0^2} + \frac{2\delta x(x_2 - x_0)}{\xi_0^2}}. \quad (9)$$

Выражение

$$\frac{1}{\xi(\phi)} = \frac{1}{\xi_0(1 + A(\phi - \phi_0) + B(\phi - \phi_0)^2)}$$

представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi(\phi_1)} &\approx \frac{1}{\xi_0} (1 - A(\phi_1 - \phi_0) + (A^2 - B)(\phi_1 - \phi_0)^2), \\ \frac{1}{\xi(\phi_2)} &\approx \frac{1}{\xi_0} (1 - A(\phi_2 - \phi_0) + (A^2 - B)(\phi_2 - \phi_0)^2), \end{aligned} \quad (10)$$

и подставим в уравнение (9):

$$\begin{aligned}
 t = & \sqrt{\frac{t_0^2}{4} + \frac{(x_0 - x_1)^2}{\xi_0^2} - \frac{2\delta x(x_0 - x_1)}{\xi_0^2}} \times \\
 & \times (1 - A(\phi_1 - \phi_0) + (A^2 - B)(\phi_1 - \phi_0)^2) + \\
 & + \sqrt{\frac{t_0^2}{4} + \frac{(x_2 - x_0)^2}{\xi_0^2} + \frac{2\delta x(x_2 - x_0)}{\xi_0^2}} \times \\
 & \times (1 - A(\phi_2 - \phi_0) + (A^2 - B)(\phi_2 - \phi_0)^2).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Выразим смещение δx и глубину z через угол ϕ_0 :

$$\begin{aligned}
 \delta x &= t_0 \xi_0 \cos \phi_0, \\
 z &= t_0 \xi_0 \sin \phi_0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Полагая, что $|\phi_1 - \phi_0| \ll 1$ и $|\phi_2 - \phi_0| \ll 1$, и, используя свойство синуса малых углов, получим выражения для разности углов $(\phi_{1,2} - \phi_0)$:

$$\begin{aligned}
 \phi_1 - \phi_0 &\approx \frac{(x_0 - x_1) \sin \phi_0}{r_1}, \\
 \phi_2 - \phi_0 &\approx -\frac{(x_2 - x_0) \sin \phi_0}{r_2}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Подставим выражения (13) и (12) в (11):

$$\begin{aligned}
 t = & (1 - A \frac{(x_0 - x_1) \sin \phi_0}{r_1} + (A^2 - B) \frac{(x_0 - x_1)^2 \sin^2 \phi_0}{r_1^2}) \times \\
 & \times \sqrt{\frac{t_0^2}{4} + \frac{(x_0 - x_1)^2}{\xi_0^2} - \frac{2(x_0 - x_1)t_0 \cos \phi_0}{\xi_0}} + \\
 & + (1 + A \frac{(x_2 - x_0) \sin \phi_0}{r_2} + (A^2 - B) \frac{(x_2 - x_0)^2 \sin^2 \phi_0}{r_2^2}) \times \\
 & \times \sqrt{\frac{t_0^2}{4} + \frac{(x_2 - x_0)^2}{\xi_0^2} + \frac{2(x_2 - x_0)t_0 \cos \phi_0}{\xi_0}}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Для каждой пары источник-приемник (x_1, x_2)

$$\begin{aligned}
 \frac{x_1 + x_2}{2} &= x_m, \\
 \frac{x_2 - x_1}{2} &= h,
 \end{aligned} \tag{15}$$

где x_m — координата средней точки, h — половина выноса.

После подстановки новых выражений для x_1 и x_2 в уравнение (14) и, обозначив $x_m - x_0 = \Delta x_m$, получаем выражения для времени хода лучей в однородной анизотропной упругой среде:

$$t = (1 + A \frac{(\Delta x_m - h) \sin \phi_0}{r_1} + (A^2 - B) \frac{(\Delta x_m - h)^2 \sin^2 \phi_0}{r_1^2}) \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \sqrt{\frac{t_0^2}{4} + \frac{(\Delta x_m - h)^2}{\xi_0^2} + \frac{2(\Delta x_m - h)t_0 \cos \phi_0}{\xi_0}} + \\
 & + (1 + A \frac{(\Delta x_m + h) \sin \phi_0}{r_2} + (A^2 - B) \frac{(\Delta x_m + h)^2 \sin^2 \phi_0}{r_2^2}) \times \\
 & \times \sqrt{\frac{t_0^2}{4} + \frac{(\Delta x_m + h)^2}{\xi_0^2} - \frac{2(\Delta x_m + h)t_0 \cos \phi_0}{\xi_0}}. \quad (16)
 \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим несколько частных случаев.

Изотропная однородная среда. В однородной изотропной среде первые и вторые производные лучевой скорости обращаются в нуль, а лучевая скорость совпадает с фазовой. Наибыстрый луч будет вертикальным, следовательно, угол $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$. В этом случае уравнение годографа дифрагированной волны (16) упрощается:

$$t = \sqrt{\frac{t_0^2}{4} + \frac{(\Delta x_m - h)^2}{v^2}} + \sqrt{\frac{t_0^2}{4} + \frac{(\Delta x_m + h)^2}{v^2}}, \quad (17)$$

где v — фазовая скорость. Уравнение совпадает с обычным уравнением двойного квадратного корня.

Изотропная неоднородная среда. В этом случае первые и вторые производные равны нулю, а лучевая скорость совпадает с фазовой. Однако наиболее быстрый луч может не совпадать с вертикальным из-за возможной сильной неоднородности. Тогда уравнение (16) принимает вид

$$\begin{aligned}
 t = & \sqrt{\frac{t_0^2}{4} + \frac{(\Delta x_m - h)^2}{v^2} + \frac{2(\Delta x_m - h)t_0 \cos \phi_0}{v}} + \\
 & + \sqrt{\frac{t_0^2}{4} + \frac{(\Delta x_m + h)^2}{v^2} - \frac{2(\Delta x_m + h)t_0 \cos \phi_0}{v}}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Неоднородности отвечает третье слагаемое под корнем, которое можно интерпретировать как боковое смещение вершины годографа дифрагированной волны относительно положения точки дифракции.

Трансверсально-изотропная среда с вертикальной осью симметрии. В этом случае наиболее быстрый луч совпадает с вертикальным, т. е. $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$. Тогда уравнение (16) принимает вид

$$\begin{aligned}
 t = & (1 + A \frac{(\Delta x_m - h)}{\sqrt{\frac{t_0^2 \xi_0^2}{4} + (\Delta x_m - h)^2}} + (A^2 - B) \frac{(\Delta x_m - h)^2}{\frac{t_0^2 \xi_0^2}{4} + (\Delta x_m - h)^2}) \times \\
 & \times \sqrt{\frac{t_0^2}{4} + \frac{(\Delta x_m - h)^2}{\xi_0^2}} + \\
 & + (1 + A \frac{(\Delta x_m + h)}{\sqrt{\frac{t_0^2 \xi_0^2}{4} + (\Delta x_m + h)^2}} + (A^2 - B) \frac{(\Delta x_m + h)^2}{\frac{t_0^2 \xi_0^2}{4} + (\Delta x_m + h)^2}) \times \\
 & \times \sqrt{\frac{t_0^2}{4} + \frac{(\Delta x_m + h)^2}{\xi_0^2}}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

3. Выражение коэффициентов A и B в трансверсально-изотропной среде

Выразим параметры A и B для трансверсально-изотропной среды с вертикальной осью симметрии. Как показано в работе [3], лучевую скорость для VTI можно представить в виде

$$\xi^{-2}(\phi^*) = a_1 + a_2 \cos^2(\phi^*) - a_3 \cos^4(\phi^*), \quad (20)$$

где a_1 , a_2 и a_3 — функции упругих параметров среды, а $\xi(\phi^*)$ — лучевая скорость продольной волны, соответствующая лучевому углу ϕ^* .

Для VTI-среды коэффициенты a_1 , a_2 и a_3 запишем в виде

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{v_{p0}^2(1+3\epsilon)}, \\ a_2 &= \frac{1}{v_{p0}^2} + a_3 - a_1, \\ a_3 &= \frac{4}{\xi^2(45)} - 2a_1 - \frac{2}{\alpha_0^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

где v_{p0} — лучевая скорость продольной волны по вертикали; ϵ — параметр анизотропии Томсона; ξ — лучевая скорость для соответствующего лучевого угла. Коэффициенты A и B представим в виде

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{2\xi_0} (a_1 + a_2 - a_3)^{-\frac{3}{2}} (a_2 - 2a_3).$$

Теперь рассмотрим случай трансверсально-изотропной среды с наклонной осью симметрии. В этом случае наибо́льший луч не совпадает с вертикальным, коэффициенты A и B в ноль не обращаются. Для квазипродольной волны лучевую скорость в трансверсально-изотропной среде с наклонной осью симметрии представим в виде [6]

$$\xi^{-2}(\phi^*) = a_1 + a_2 \cos^2(\phi^* - \psi) - a_3 \cos^4(\phi^* - \psi), \quad (22)$$

где ϕ^* — лучевой угол; ψ — угол поворота оси симметрии по отношению к вертикали.

4. Численные результаты

Представим некоторые численные результаты для различных моделей (VTI и TTI) среды. Оценим действенность полученного приближенного уравнения, сравнив значения времени хода, вычисленные по приближенной формуле, со значениями, получаемыми по формуле [2] и с данными, полученными при прямом расчете времени хода дифрагированной волны при известном (заданном) положении дифрактора для различных моделей среды. Точка дифракции находится на глубине $z = 2$ км. На рис. 3 и 4 изображена зависимость времени хода луча от офсета.

Трансверсально-изотропная среда с вертикальной осью симметрии. Сравнение годографов дифрагированных волн представлено на рис. 3. Ошибка полученных данных не превышает 1%.

Трансверсально-изотропная среда с наклонной осью симметрии. Нами были использованы те же параметрами среды, что и в случае VTI, наклон оси симметрии

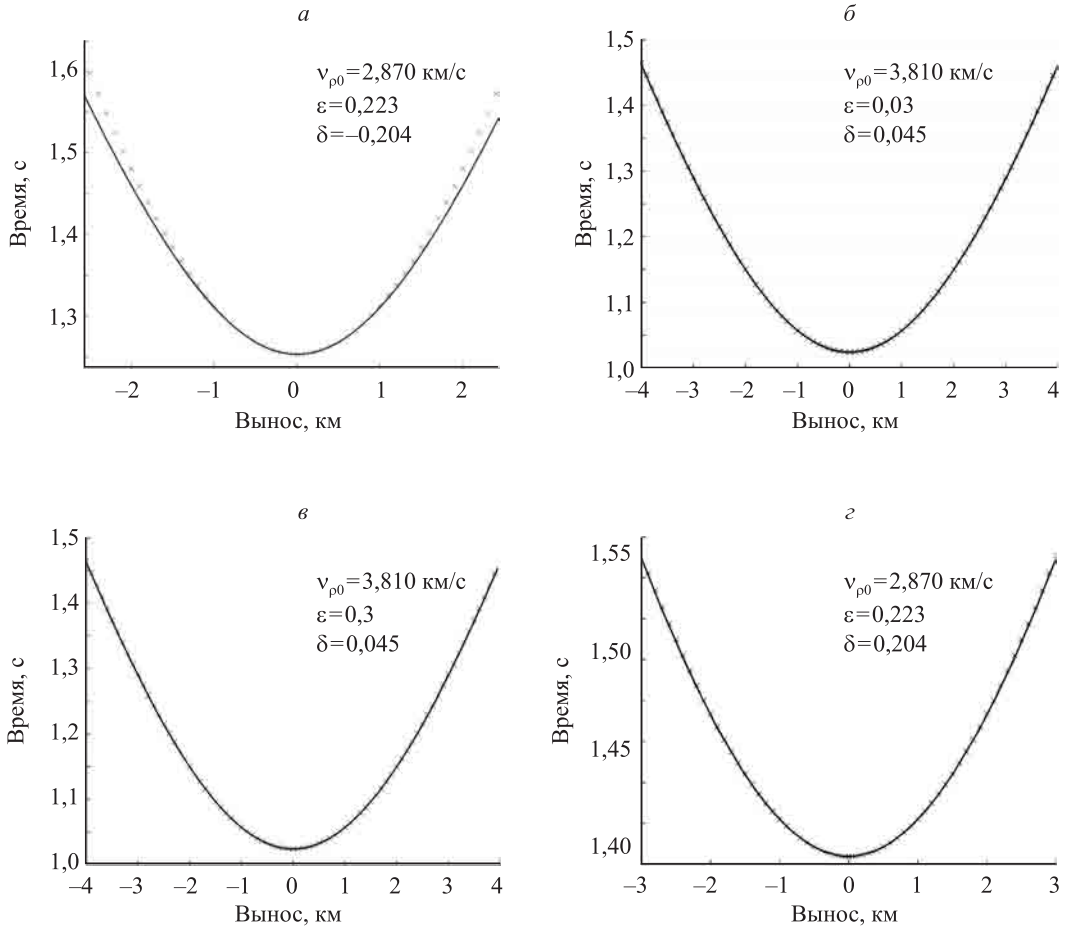


Рис. 3. Сравнение годографов для VTI-среды.

Крестики – приближенное значение; точки – точное; линии – значения, вычисленные по формуле Аль Халифа и Цванкина [2]

60° от вертикали. Для всех моделей ТТИ сравнение результатов приведено на рис. 4. Отметим очень хорошее соответствие между точным и приближенным решением для всех примеров. Ошибка полученных данных также не превышает 1%. Как результат отметим, что в целом точность нового уравнения довольно высокая.

Выводы

В работе представлен новый метод для вычисления времен хода дифрагированных волн в однородной анизотропной упругой среде. Преимущество данной формулы состоит в том, что она может применяться в средах с произвольной анизотропией. Новое уравнение зависит от четырех независимых параметров, достаточных для описания времен прихода дифрагированных волн. Также полученная формула может быть использована при выполнении временной миграции Кирхгофа.

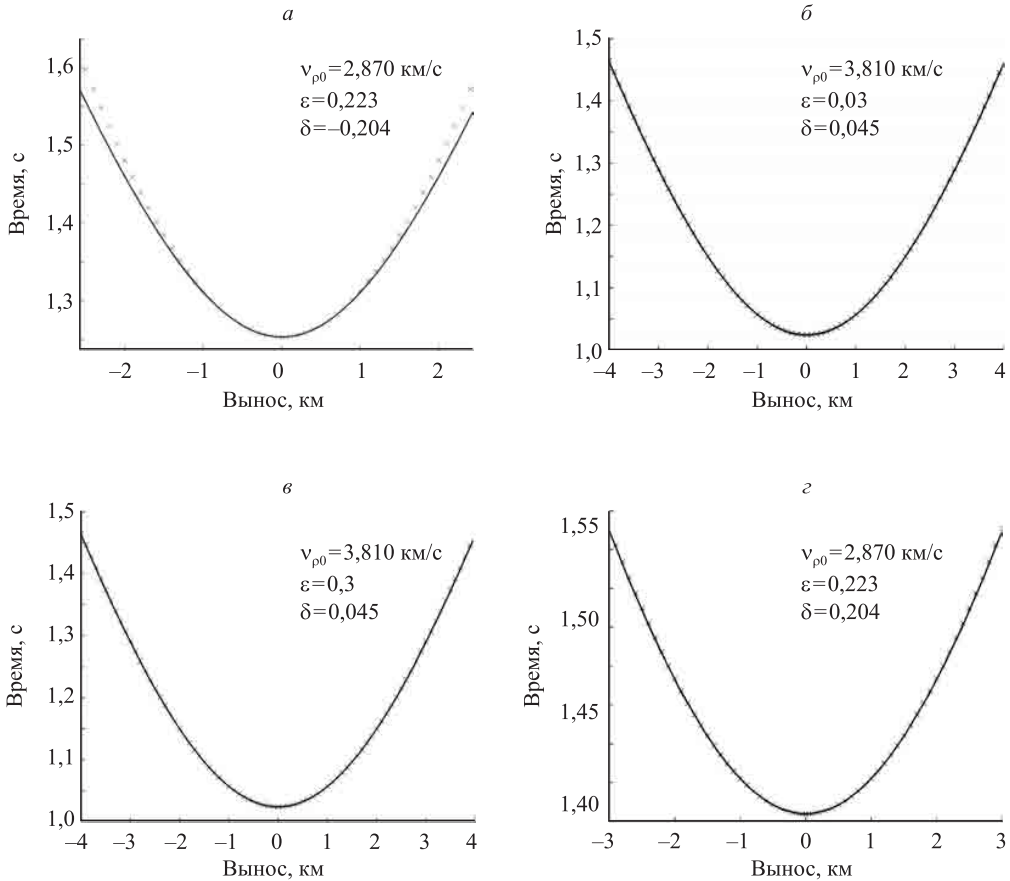


Рис. 4. Сравнение годографов для ТТИ-среды (угол поворота оси симметрии 60°). Крестики — приближенное значение; линии с точками — точное

Указатель литературы

1. Alkhalifah T. The offset-midpoint traveltime pyramid in transversely isotropic media // Geophysics. 2000. Vol. 65(4). P. 1316–1325.
2. Alkhalifah T., Tsvankin I. Velocity analysis for transversely isotropic media // Geophysics. 1995. Vol. 60. P. 1550–1566.
3. Byun B. S., Corrigan D., Gaiser J. E. Anisotropic velocity analysis for lithology discrimination // Geophysics. 1989. Vol. 54. P. 1564–1566.
4. Dell S., Gajewski D. Common-reflection-surface-based workflow for diffraction imaging // Geophysics. 2011. Vol. 76(5), S187; doi:10.1190/geo2010-0229.1.
5. Khaidukov V., Landa E., Moser T. J. Diffraction imaging by focusing-defocusing: An outlook on seismic superresolution // Geophysics. 2004. Vol. 69. P. 1478–1490.
6. Kumar D., Sen M. K., Ferguson R. J. Traveltime calculation and prestack depth migration in tilted transversely isotropic median // Geophysics. 2004. Vol. 69. P. 37–44.
7. Thomsen L. Weak elastic anisotropy // Geophysics. 1986. Vol. 51. P. 1954–1956.
8. Петрашнев Г. И. Распространение волн в упругих анизотропных средах. Л.: Наука, 1980. 215 с.