

Л. О. Даниловская, В. А. Корнеев, Б. М. Каштан

## ВОЛНА КРАУКЛИСА В СЛОИСТОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ

### Введение

Проблема распространения упругих волн в слоистых средах интенсивно изучается в сейсморазведке, акустике, физиологии и физике материалов в течение последних полутора столетий. Отдельную историю имеет вопрос о распространении волн в трехслойной упругой модели в случае, когда слой, заполненный флюидом, заключен между двумя упругими полупространствами. Впервые в 1962 г. Крауклис [1] показал, что в такой модели возникает медленная дисперсионная волна, скорость которой стремится к нулю при стремлении частоты к нулю. Крауклис получил свои результаты в аналитической форме в общем случае двух полупространств с различными упругими параметрами. После работы Крауклиса медленная волна была независимо обнаружена численными расчетами в акустике [2] для модели с упругими слоями конечной толщины и в сейсмологии [3] в модели с двумя одинаковыми полупространствами.

В 1998 г. Ф. Коловрат и др. [4] получили аналитическое выражение для скорости медленной волны для симметричной модели с двумя упругими пластинами, основываясь на вариационном подходе в предположении о тонкости пластин, и назвали эту моду струйной волной. А. Белл и Н. Флетчер [5] утверждают, что медленная жидкостная волна, образующаяся в ушной улитке, является основным механизмом передачи энергии акустических волн к нейронам и, таким образом, ответственна за физиологию восприятия слуха животными и человеком. Медленные флюидные волны были обнаружены в лаборатории в работах Танг и Ченг [6] в килогерцовом диапазоне и в полевых измерениях [7]. Предполагается, что именно эти волны определяют механизм наблюдаемых низкочастотных эффектов над нефтяными и газовыми месторождениями и возникновение резонансов сейсмических волн в районах подобных месторождений. В. А. Корнеев [8] в 2008 г. исследовал распространение медленной волны в вязком слое жидкости, расположенном между упругими полупространствами, и выписал низкочастотные приближения для фазовой скорости медленной волны. М. Фррейнер и С. Шмальгольц [9] численно с помощью метода конечных разностей исследовали отражение и рассеяние медленной волны от конца трещины и обнаружили довольно высокие значения коэффициентов отражения от концов трещины. Это является аргументом в пользу резонансного рассеяния волн в трещинах. В 2011 г. В. Корнеев [10] опубликовал статью, в которой медленная волна была названа волной Крауклиса. Возможность возбуждения этих волн остается открытой проблемой из-за шероховатости реальных трещин и малоизученности физики граничных условий. Также неизученным остается вопрос, как лабораторные исследования перенести на реальную модель в сейсмическом диапазоне частот.

В данной работе рассматриваются различные режимы распространения волны Крауклиса: низкочастотный и высокочастотный, «тонких» упругих пластин и полупространств, находятся условия перехода между этими режимами. Полученные в явном

виде выражения для скоростей волн в этих режимах сравниваются с точными значениями. Проводится расчет резонансных частот медленной волны для лабораторной модели.

## Теория

Рассмотрим трехслойную модель, изображенную на рис. 1. Слой, заполненный жидкостью  $z = -H_1/2, H_1/2$ , помещен между двумя одинаковыми, однородными и изотропными, упругими пластинами  $z = H_1/2, H_2/2$  и  $z = -H_2/2, -H_1/2$ . Ось  $r$  расположена в центре жидкого слоя, ось  $z$  ортогональна границам раздела слоев и направлена вертикально вверх. Ввиду симметрии задачи начало координат выбрано в центре жидкого слоя. Упругие пластины имеют толщину  $H$  и состоят из одного и того же материала, характеризующегося плотностью  $\rho$ , скоростью продольных  $V_p$  и скоростью поперечных  $V_s$  волн. Жидкий слой имеет толщину  $d$ , плотность  $\rho_f$ , скорость звука  $V_f$ . Задачей является поиск волн, распространяющихся вдоль границ слоев. Зависимость полей смещений от времени  $t$  имеет вид  $\exp(i\omega t)$  с угловой частотой  $\omega$  и  $i = \sqrt{-1}$ . Уравнение движения упругой изотропной среды в частотной области:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \omega^2 \rho \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

где  $\lambda, \mu$  — параметры Ламе,  $\omega$  — круговая частота. В упругих средах связь между скоростями и упругими параметрами определяется выражениями:

$$V_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad V_s^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad (2)$$

где  $V_p$  и  $V_s$  — скорости продольной и поперечной волн соответственно.

В жидкой среде ( $\mu=0$ ) поперечная волна не существует, а продольная волна распространяется со скоростью  $V_f^2 = \lambda/\rho_f$ .

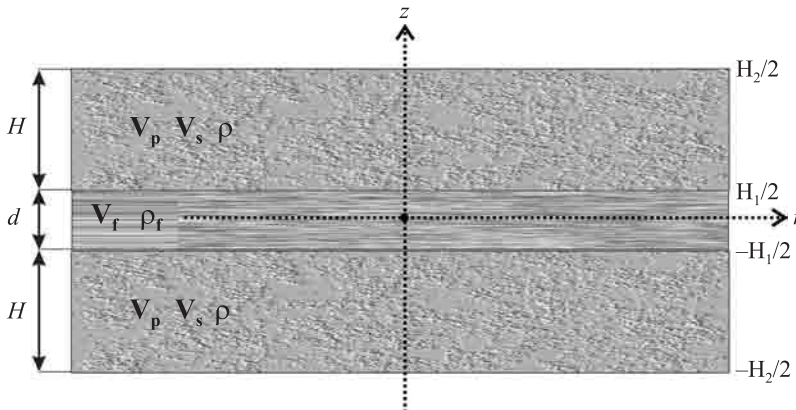


Рис. 1. Схема модели

Требуется найти осесимметричное поле смещений  $\mathbf{u}(r, \varphi, z)$ , удовлетворяющее граничным условиям:

1) на свободных границах упругих пластин все напряжения

$$t_{rz} = 0, \quad t_{zz} = 0, \quad (3)$$

2) на границах жидкого слоя и упругих пластин

$$[t_{zz}] = 0, \quad [u_z] = 0, \quad t_{rz} = 0, \quad (4)$$

где  $t_{zz}$  — нормальные напряжения;  $t_{rz}$  — касательные напряжения;  $u_z$  — нормальные смещения; квадратные скобки — предельные значения по разные стороны от границы раздела.

Поле смещений  $u_r$  и  $u_z$  и напряжений  $t_{rz}$  и  $t_{zz}$  определим с помощью преобразований Фурье—Бесселя:

$$\begin{aligned} u_r^{(i)}(r, z, \omega) &= \int_0^\infty U_r^{(i)}(k, z, \omega) J_1(kr) dk; \\ u_z^{(i)}(r, z, \omega) &= \int_0^\infty U_z^{(i)}(k, z, \omega) J_0(kr) dk; \\ t_{rz}^{(i)}(r, z, \omega) &= \int_0^\infty T_{rz}^{(i)}(k, z, \omega) J_1(kr) dk; \\ t_{zz}^{(i)}(r, z, \omega) &= \int_0^\infty T_{zz}^{(i)}(k, z, \omega) J_0(kr) dk, \end{aligned} \quad (5)$$

где подынтегральные функции имеют вид

$$\begin{aligned} U_r = kC_p^{(+)} e^{\alpha_p(z-\frac{H_2}{2})} + kC_p^{(-)} e^{-\alpha_p(z-\frac{H_1}{2})} - \alpha_s C_s^{(+)} e^{\alpha_s(z-\frac{H_2}{2})} + \\ + \alpha_s C_s^{(-)} e^{-\alpha_s(z-\frac{H_1}{2})}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} U_z = -\alpha_p C_p^{(+)} e^{\alpha_p(z-\frac{H_2}{2})} + \alpha_p C_p^{(-)} e^{-\alpha_p(z-\frac{H_1}{2})} + kC_s^{(+)} e^{\alpha_s(z-\frac{H_2}{2})} + \\ + kC_s^{(-)} e^{-\alpha_s(z-\frac{H_1}{2})}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} T_{rz} = 2\mu k \alpha_p C_p^{(+)} e^{\alpha_p(z-\frac{H_2}{2})} - 2\mu k \alpha_p C_p^{(-)} e^{-\alpha_p(z-\frac{H_1}{2})} + \mu b C_s^{(+)} e^{\alpha_s(z-\frac{H_2}{2})} + \\ + \mu b C_s^{(-)} e^{-\alpha_s(z-\frac{H_1}{2})}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} T_{zz} = \mu b C_p^{(+)} e^{\alpha_p(z-\frac{H_2}{2})} + \mu b C_p^{(-)} e^{-\alpha_p(z-\frac{H_1}{2})} + 2\mu k \alpha_s C_s^{(+)} e^{\alpha_s(z-\frac{H_2}{2})} - \\ - 2\mu k \alpha_s C_s^{(-)} e^{-\alpha_s(z-\frac{H_1}{2})}. \end{aligned} \quad (9)$$

В уравнениях использованы обозначения:  $b = \omega^2 V_s^{-2} - 2k^2$ ,  $\alpha_i = \sqrt{k^2 - \omega^2 V_i^{-2}}$ ,  $i = f, s, p$ , где  $k = \omega/V$  — волновое число;  $V$  — фазовая скорость.

Смещения и напряжения в жидком слое имеют вид

$$U_r = kC_f^{(+)} e^{\alpha_f z} + kC_f^{(-)} e^{-\alpha_f z}, \quad (10)$$

$$U_z = -\alpha_f C_f^{(+)} e^{\alpha_f z} + \alpha_f C_f^{(-)} e^{-\alpha_f z}, \quad (11)$$

$$T_{rz} = 0, \quad (12)$$

$$T_{zz} = \rho_f \omega^2 C_f^{(+)} e^{\alpha_f z} + \rho_f \omega^2 C_f^{(-)} e^{-\alpha_f z}. \quad (13)$$

Дисперсионное уравнение находится подстановкой выражений для смещений и напряжений (6–9) и (10–13) в граничные условия (3–4), что приводит к системе линейных уравнений десятого порядка. Поскольку модели по отношению к центру жидкого слоя симметричны, достаточно удовлетворить граничным условиям только для одной упругой пластины, что позволяет свести размерность системы до пятого порядка.

Рассмотрим только волны, симметричные по отношению к центру трехслойной модели:

$$\begin{aligned} u_z^{(f)}(r, z, t) &= -u_z^{(f)}(r, -z, t), \\ u_x^{(f)}(r, z, t) &= u_x^{(f)}(r, -z, t). \end{aligned} \quad (14)$$

Смещения и напряжения в жидком слое (10–13), удовлетворяющие условию симметрии (14), имеют вид

$$U_r^{(f)} = kC_f \cosh(\alpha_f z), \quad (15)$$

$$U_z^{(f)} = -\alpha_f C_f \sinh(\alpha_f z), \quad (16)$$

$$T_{zz}^{(f)} = \rho_f \omega^2 C_f \cosh(\alpha_f z). \quad (17)$$

Подставляем выражения для смещений и напряжений в жидком слое и упругих пластинах в граничные условия и получаем систему линейных уравнений пятого порядка для неизвестных  $C_p^{(+)}$ ,  $C_s^{(+)}$ ,  $C_p^{(-)}$ ,  $C_s^{(-)}$ ,  $C_f$ . Равенство нулю определителя системы дает дисперсионное уравнение для определения фазовых скоростей волн:

$$\Delta(\omega, k) = 0. \quad (18)$$

После стандартной замены  $k = \omega \zeta$  дисперсионное уравнение принимает вид

$$\begin{vmatrix} 2\zeta\alpha_p & b & -2\zeta\alpha_p e^{-\alpha_p \omega H} & b e^{-\alpha_s \omega H} & 0 \\ b & 2\zeta\alpha_s & b e^{-\alpha_p \omega H} & -2\zeta\alpha_s e^{-\alpha_s \omega H} & 0 \\ 2\zeta\alpha_p e^{-\alpha_p \omega H} & b e^{-\alpha_s \omega H} & -2\zeta\alpha_p & b & 0 \\ -\alpha_p e^{-\alpha_p \omega H} & \zeta e^{-\alpha_s \omega H} & \alpha_p & \zeta & \xi \\ \mu b e^{-\alpha_p \omega H} & 2\mu\zeta\alpha_s e^{-\alpha_s \omega H} & \mu b & -2\mu\zeta\alpha_s & -\rho_f \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

Здесь использованы обозначения:  $\xi = \alpha_f \tanh(\alpha_f \omega d/2)$ ,  $b = V_s^{-2} - 2\zeta^2$ ,  $\alpha_i = \sqrt{\zeta^2 - V_i^{-2}}$ ,  $i = f, s, p$ .

При малых частотах это уравнение имеет два вещественных корня —  $V_1$  и  $V_2$ . Значение первого корня  $V_1$  при высоких частотах близко к скорости волн в жидкости, поэтому эту волну называют «жидкостной». При низких частотах значение второго корня  $V_2$  близко к скорости продольной волны в упругих пластинах. Поэтому этот корень соответствует волне, распространяющейся в пластинах.

### Асимптотический анализ дисперсионного уравнения

В случае бесконечно толстых стенок  $H \rightarrow \infty$  матрица становится блочно-диагональной, где верхняя левая  $2 \times 2$  подматрица — уравнение Рэлея для  $V_2$ :

$$R \equiv 4\zeta^2 \alpha_p \alpha_s - \left( \frac{1}{v_s^2} - 2\zeta^2 \right)^2 = 0, \quad (20)$$

а правая нижняя подматрица  $3 \times 3$  — уравнение Крауклиса для  $V_1$ :

$$\mu v_s^2 R \xi + \rho_f \alpha_f = 0, \quad (21)$$

где  $\xi = \alpha_f \tanh(\alpha_f \omega d/2)$ .

Если в уравнении (11) предположить  $|\alpha_f \omega d| < 1$ , а также  $V/V_j \ll 1$ , где  $j = f, s, p$ , радикалы дисперсионного уравнения (21) заменить на  $\alpha_i \approx \zeta \left( 1 - \frac{v^2}{2v_j^2} \right)$  и использовать приближение  $\tanh(x) \approx x$ , то получается низкочастотное приближение для фазовой скорости медленной волны:

$$V_{K0} = \left( \frac{\omega d \mu}{\rho_f} (1 - \gamma^2) \right)^{1/3}, \quad (22)$$

где  $\gamma = V_s/V_p$ .

В случае, когда толщина упругих пластин  $H$  мала в сравнении с длиной волны  $\lambda = V/f$ , где  $f$  — частота в герцах, фазовая скорость медленной волны приближенно определяется выражением

$$V_{K0}^* = \left( \frac{\omega^4 H^3 d \mu (1 - \gamma^2)}{6 \rho_f} \right)^{1/6}. \quad (23)$$

Эта формула аналогична формуле, полученной Коловратом для модели «тонких» пластин [4]. И эту же формулу использует Белл для модели ушной раковины [5], обосновывая участие волны Крауклиса в физиологии восприятия слуха человеком. При низких частотах в упругих пластинах распространяется симметричная волна Лэмба со скоростью

$$V_L = 2\sqrt{1 - \gamma^2} V_s. \quad (24)$$

Переход волны Крауклиса из низкочастотного режима в случае двух полупространств  $V_{K0}$  в режим волны Шолте  $V_{Sh}$  происходит, когда скорость волны Крауклиса близка к скорости жидкости:

$$V_{K0} = V_f. \quad (25)$$

Переход волны Крауклиса из низкочастотного режима в случае двух полупространств  $V_{K0}$  в режим «тонких стенок»  $V_{K0}^*$  происходит при условии

$$V_{K0} = V_{K0}^*. \quad (26)$$

## Численные результаты

На рис. 2 изображены дисперсионные зависимости вещественной части фазовых скоростей от частоты для симметричной трехслойной модели мрамор — вода — мрамор с параметрами упругих пластин:  $H = 3$  см,  $V_s = 3135$  м/с,  $V_p = 5587$  м/с,  $\rho = 2670$  кг/м<sup>3</sup>. Параметры трещины:  $d = 1$  мм,  $\rho_f = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $V_f = 1481$  м/с. Точные зависимости корней дисперсионного уравнения показаны на рисунке сплошной линией. Асимптотические приближения этих дисперсионных кривых представлены пунктирными линиями:  $V_K$  — корень уравнения Крауклиса (21);  $V_{K0}$  — низкочастотная асимптотика уравнения Крауклиса (22);  $V_{K0}^*$  — волна Крауклиса в режиме тонких пластин (23);  $V_R$  — корень уравнения Рэлея (20);  $V_L$  — низкочастотная симметричная волна Лэмба (24). Точки на сплошной кривой соответствуют переходу волны Крауклиса из режима «тонких» стенок в режим полупространств, который определяется из условия (26), и переходу волны Крауклиса от режима  $V_{K0}$  к режиму волны Шолте  $V_{Sh}$ , который получается из условия (25).

Вычисление волновых полей проводилось с использованием программы OASP из пакета OASES [11]. На рис. 3 представлены сейсмограммы радиальной  $u_r$  и вертикальной  $u_z$  компонент поля смещения. Точечный источник типа центра расширения расположен в центре жидкого слоя. Временная функция источника — первая производная функции Гаусса с центральной частотой 50 Гц. Волновое поле регистрируется на вертикальной линии, состоящей из 60 приемников, расположенной на расстоянии 5 м от источника. Дисперсионная волна на сейсмограмме — волна Крауклиса. Амплитуда радиальной компоненты в центре жидкого слоя настолько большая, что остальные волны, распространяющиеся в этой модели, не видны. К записи вертикальной компоненты применен амплитудный множитель 100 (рис. 3, б).

Прежде чем наблюдать медленную волну в лаборатории, рассмотрим конечную модель, когда упругий слой имеет длину, равную 60 см. Толщина жидкого слоя 1 мм, толщина упругих пластин 3 см. Предположим, что жесткость на концах модели большая, так что скорость волны Крауклиса в этих точках равна нулю, что дает условие резонанса:  $l/\lambda = n/2$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Для модели, состоящей из мрамора и воды, вытекают следующие резонансные частоты: частота первого колебания  $f = 6,7$  Гц, второго —  $f = 53,7$  Гц, третьего —  $f = 177$  Гц. Первые три частоты колебания находятся в сейсмическом диапазоне частот.

## Заключение

Флюидная мода при увеличении толщины слоя из струйной волны переходит в решение, полученное Крауклисом. При уменьшении частоты, так же как и при уменьшении толщины упругих пластин, асимптотическое решение для тонкого слоя и точное решение совпадают.

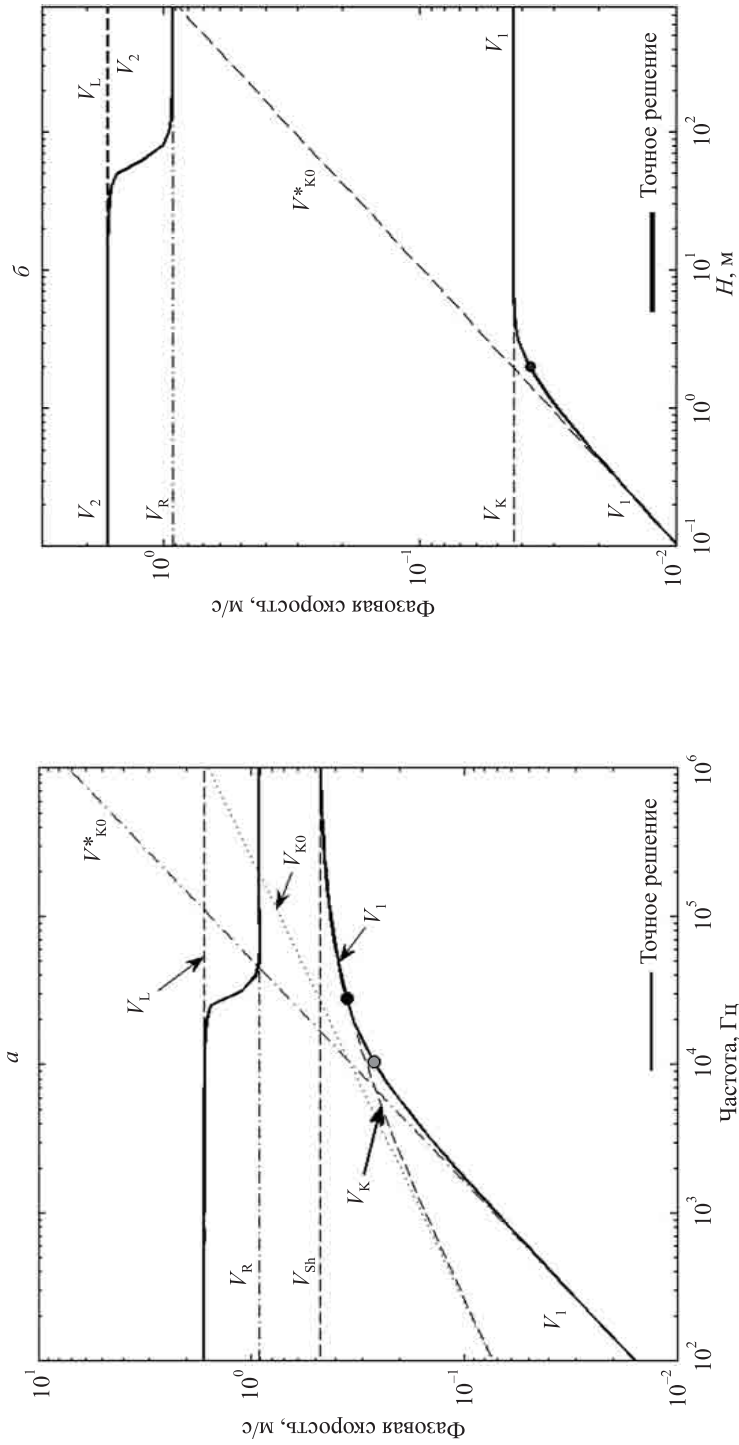


Рис. 2. Зависимости вещественной части нормированной фазовой скорости от частоты (а) и толщины упругой пластины (б)

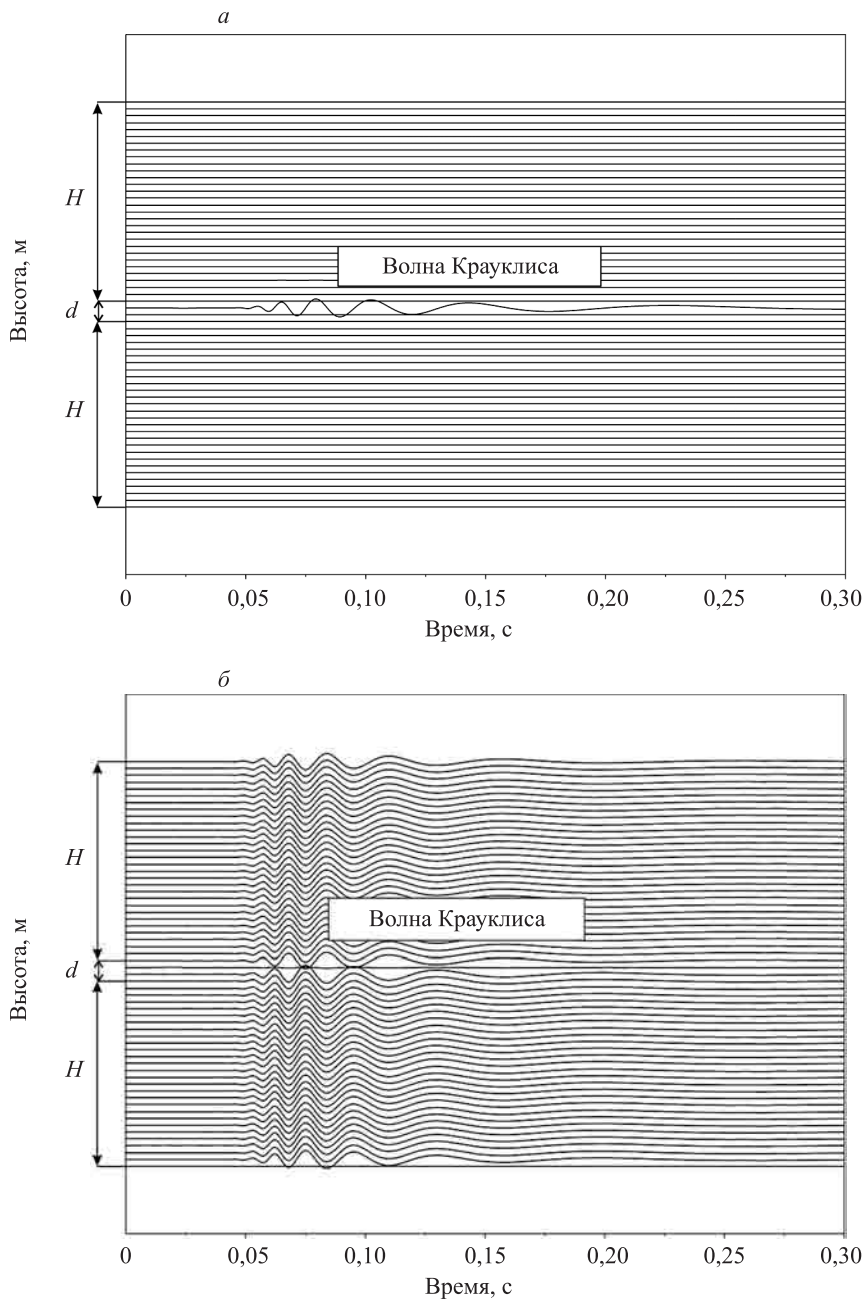


Рис. 3. Радиальная (а) и вертикальная (б) компоненты поля смещения для вертикального расположения приемников на расстоянии 5 м от источника



Аналитическая форма критериев перехода из одного асимптотического режима в другой подтверждена сравнением с решением точной задачи. Рассчитаны условия резонанса флюидной волны в трехслойной модели в лабораторном эксперименте. Нижний диапазон этих резонансных частот лежит в области сейсмических разведочных частот, что позволяет экстраполировать данные, полученные в лабораторном эксперименте, на реальную модель.

#### Указатель литературы

1. Крауклис П. В. О некоторых низкочастотных колебаниях жидкого слоя в упругой среде // Прикладная математика и механика. 1962. № 6. С. 1111–1115.
2. Lloyd P., Redwood M. Wave propagation in a layered plate composed of two solids with perfect contact, slip, or a fluid layer at their interface // *Acustica*. 1965. Vol. 16. P. 224–232.
3. Paillet F. L., White J. E. Acoustic models of propagation in the borehole and their relationship to rock properties // *Geophysics*. 1982. Vol. 47. P. 1215–1228.
4. Coulouvrat F., Rousseau M., Lenoir O., Izbicki J. Lamb-Type Waves in a Symmetric Solid-Fluid-Solid Trilayer // *Acustica*. 1998. Vol. 84. P. 12–20.
5. Bell A., Fletcher N. H. The cochlear amplifier as a standing wave: “Squirting” waves between rows of outer hair cells // *JASA*. 2004. Vol. 116. P. 1016–1024.
6. Tang X. M., Cheng C. H. Wave propagation in a fluid-filled fracture—an experimental study // *Geophysical Research Letters*. 1988. Vol. 15. P. 1463–1466.
7. Ferrazzini V., Chouet B., Fehler M., Aki K. Quantitative analysis of long-period events recorded during hydrofracture experiments at Fenton Hill, New Mexico: Implications for volcanic tremor // *J. Geophysical Research*. 1990. Vol. 95. P. 21871–21884.
8. Korneev V. A. Slow waves in fracture filled with viscous fluid // *Geophysics*. 2008. Vol. 73. P. N1–N7.
9. Frehner M., Schmalholz S. M. Finite-element simulations of Stoneley guided wave reflection and scattering at the tips of fluid-filled fractures // *Geophysics*. 2010. Vol. 75. P. T23–T36.
10. Korneev V. Krauklis wave in a stack of alternating fluid-elastic layers // *Geophysics*. 2011. Vol. 76. P. N47–N53.
11. Schmidt H. OASES. Version 3.1. User Guide and Reference Manual. Henrik Schmidt Department of ocean engineering Massachusetts Institute of Technology. October 26. 2004.