

С. А. Вагин, А. В. Козлова, И. Л. Варданянц

ДВУМЕРНАЯ ИНВЕРСИЯ МАГНИТОТЕЛЛУРИЧЕСКИХ ДАННЫХ С УЧЁТОМ ВЛИЯНИЯ РЕЛЬЕФА ПОВЕРХНОСТИ

Введение. Складчатые области, как правило, характеризуются неоднородным по горизонтали строением, и 1D интерпретация при этом неприменима. Кроме того, объём достоверной априорной информации при изучении складчатых областей обычно невелик. В этих условиях интерпретацию начинают с 2D-инверсии, позволяющей получить сглаженное распределение сопротивлений и отражающей основные геоэлектрические структуры [1]. Успех интерпретации зависит не только от выбора стартовой модели, которую желательно согласовать с известными представлениями о регионе, но и от применяемой методики расчета. Для определения влияния рельефа поверхности авторами статьи была разработана и опробована методика 2D-инверсии, основанная на методе минимальных невязок с адаптивной регуляризацией.

1. Алгоритм двумерной инверсии МТ-данных на профиле с изменением рельефа. Прежде чем описывать сам алгоритм, рассмотрим метод минимальных невязок для решения линейных обратных задач, который будем использовать при инверсии. Метод минимальных невязок относится к итерационным методам.

1.1. Метод минимальных невязок (ММН). Рассмотрим линейное операторное уравнение

$$\mathbf{f} = L\mathbf{m}, \quad (1)$$

где $\mathbf{f}, \mathbf{m} \in M$, а L — линейный непрерывный оператор в вещественном гильбертовом пространстве M . Итерационное решение (1) выразим формулой

$$\mathbf{m}_{n+1} = \mathbf{m}_n + \Delta\mathbf{m}_n = \mathbf{m}_n - k_n\mathbf{r}_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где \mathbf{m}_0 — начальное приближение, $\Delta\mathbf{m}_n$ — итерационный шаг,

$$\Delta\mathbf{m}_n = -k_n\mathbf{r}_n, \quad (3)$$

\mathbf{r}_n — невязка на n -м шаге,

$$\mathbf{r}_n = L\mathbf{m}_n - \mathbf{f}, \quad (4)$$

k_n — итерационный коэффициент.

$$\mathbf{r}_{n+1} = L\mathbf{m}_{n+1} - \mathbf{f} = L\mathbf{m}_n - k_n L\mathbf{r}_n - \mathbf{f} = \mathbf{r}_n - k_n L\mathbf{r}_n. \quad (5)$$

Выбор k_n заключается в минимизации нормы невязки \mathbf{r}_{n+1} :

$$\|\mathbf{r}_n\|^2 = \|\mathbf{r}_{n+1} - k_n L\mathbf{r}_n\|^2 = \Phi^2(k_n) \rightarrow \min. \quad (6)$$

Станислав Александрович Вагин — доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: stvagin@gmail.com

Александра Вячеславовна Козлова — соискатель, кафедра физики Земли, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: fev83@rambler.ru

Изабелла Леоновна Варданянц — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: izabella-spb@mail.ru

© С. А. Вагин, А. В. Козлова, И. Л. Варданянц, 2013

Функцию $\|\Phi\|^2(k_n)$ можно задать, используя операцию скалярного произведения в M :

$$\Phi^2(k_n) = (\mathbf{r}_n - k_n L\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_n - k_n L\mathbf{r}_n) = (\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_n) - 2k_n(\mathbf{r}_n, L\mathbf{r}_n) + k_n^2(L\mathbf{r}_n, L\mathbf{r}_n) \rightarrow \min. \quad (7)$$

Дифференцируя Φ^2 по k_n , получим условие минимума $\|\mathbf{r}_{n+1}\|^2$:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi^2(k_n)}{dk_n} &= -2(\mathbf{r}_n, L\mathbf{r}_n) + 2k_n(L\mathbf{r}_n, L\mathbf{r}_n) = 0; \\ k_n &= \frac{(\mathbf{r}_n, L\mathbf{r}_n)}{(L\mathbf{r}_n, L\mathbf{r}_n)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Соответствующий минимум $\Phi(k_n)$, согласно (7),

$$\Phi(k_n) = \|\mathbf{r}_{n+1}\| = \sqrt{(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_n) - \frac{(\mathbf{r}_n, L\mathbf{r}_n)^2}{(L\mathbf{r}_n, L\mathbf{r}_n)}} = \|\mathbf{r}_n\| \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{r}_n, L\mathbf{r}_n)^2}{\|\mathbf{r}_n\|^2 \|L\mathbf{r}_n\|^2}}. \quad (9)$$

Из (9) видно, что на $(n+1)$ -й итерации всегда

$$\|\mathbf{r}_{n+1}\| \leq \|\mathbf{r}_n\|. \quad (10)$$

Равенство возможно, если $L\mathbf{r}_n$ и \mathbf{r}_n взаимно ортогональны: $(L\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_n) = 0$. Рекуррентные формулы (2)–(8) составляют метод минимальных невязок (ММН). В работе [2] этот подход был распространён на более общий случай линейного операторного уравнения в комплексном гильбертовом пространстве M . В комплексном случае свойство симметрии скалярного произведения выглядит иначе:

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = (\mathbf{g}, \mathbf{f})^*, \quad (11)$$

где звёздочка означает комплексное сопряжение. Из этой формулы следует

$$(\mathbf{f}, k\mathbf{g}) = k^*(\mathbf{f}, \mathbf{g})^*.$$

Итерационный коэффициент k_n в (8) может иметь комплексное значение, так как $(\mathbf{r}_n, L\mathbf{r}_n)$ — комплексное число. Формула (9) примет вид

$$\Phi(k_n) = \|\mathbf{r}_{n+1}\| = \sqrt{(\mathbf{r}_n - k_n L\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_n - k_n L\mathbf{r}_n)} = \|\mathbf{r}_n\| \sqrt{1 - \frac{|(\mathbf{r}_n, L\mathbf{r}_n)|^2}{\|\mathbf{r}_n\|^2 \|L\mathbf{r}_n\|^2}}. \quad (12)$$

В комплексном случае оператор L должен быть строго положительно определённым:

$$|(\mathbf{m}, L\mathbf{m})| \geq \gamma(\mathbf{m}, \mathbf{m}) = \gamma\|\mathbf{m}\|^2, \quad \gamma > 0 \quad (13)$$

для всех $\mathbf{m} \in M$.

1.2. Линеаризация оператора прямой задачи. Магнитотеллурическая задача является нелинейной, т. е. нелинеен оператор A прямой задачи в уравнении

$$A\mathbf{m} = \mathbf{d}. \quad (14)$$

Для дискретной задачи вектор данных \mathbf{d} и вектор модельных параметров \mathbf{m} при помощи операции транспонирования запишем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= [d_1, d_2, \dots, d_n]^T, \\ \mathbf{m} &= [m_1, m_2, \dots, m_k]^T. \end{aligned} \quad (15)$$

Процесс линеаризации заключается в следующем: будем искать не саму модель \mathbf{m} , а поправки $\Delta\mathbf{m}$ к некоторому начальному приближению $\mathbf{m}^{(0)}$. Для этого разложим оператор прямой задачи в ряд Тейлора в окрестности начального приближения $\mathbf{m}^{(0)}$ и ограничимся двумя первыми членами:

$$d_i = A_i(\mathbf{m}^{(0)}) + \sum_{j=1}^k \frac{\partial A_i(\mathbf{m}^{(0)})}{\partial m_j} + \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \frac{\partial^2 A_i(\mathbf{m}^{(0)})}{\partial m_j \partial m_l},$$

$$i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, k; \quad l = 1, \dots, k$$

или

$$d_i = A_i(\mathbf{m}^{(0)}) + \sum_{j=1}^k \frac{\partial A_i(\mathbf{m}^{(0)})}{\partial m_j} + O\|\mathbf{m}\|^2.$$

При малых поправках связь между $\Delta\mathbf{m}$ и отклонениями наблюдений $\Delta\mathbf{d}$ приближённо будет линейной:

$$A(\mathbf{m}) = A_i(\mathbf{m}^{(0)}) + A\Delta\mathbf{m}, \quad (16)$$

где в случае конечномерного пространства моделей M \mathbf{A} — матрица с элементами

$$A_{ij}(\mathbf{m}^{(0)}) = \left[\frac{\partial A_i}{\partial m_j} \right]_{\mathbf{m}=\mathbf{m}^{(0)}}, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, k. \quad (17)$$

Если воспользоваться методом последовательных приближений, то на первой итерации мы найдём $\Delta\mathbf{m}^{(1)}$, по которому находится первое приближение $\mathbf{m}^{(1)} = \mathbf{m}^{(0)} + \Delta\mathbf{m}^{(1)}$, на второй итерации в качестве начального приближения мы возьмём $\Delta\mathbf{m}^{(1)}$ и для него определим $\Delta\mathbf{m}^{(2)}$, и второе приближение будет $\mathbf{m}^{(2)} = \mathbf{m}^{(1)} + \Delta\mathbf{m}^{(2)}$ и т. д. На каждом шаге процесса при этом должна решаться линейная обратная задача

$$A\Delta\mathbf{m}^{(s)} = \Delta\mathbf{d}^{(s-1)} = \mathbf{d} - A(\mathbf{m}^{(s-1)}), \quad (18)$$

для которой элементы матрицы \mathbf{A} находятся по формуле для модели, полученной на предыдущей итерации:

$$A_{ij} = \left[\frac{\partial A_i}{\partial m_j} \right]_{\mathbf{m}=\mathbf{m}^{(s-1)}}, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, k. \quad (19)$$

Размер матрицы чувствительности \mathbf{A} — $n \times k$, где n — число наблюдений, k — число параметров модели.

Сведение нелинейного оператора (14) прямой задачи к линейному оператору вида (18) называется линеаризацией задачи. Основное преимущество линеаризованной обратной задачи в том, что для линейных задач существуют хорошо разработанные методы и алгоритмы. Кроме того, в тех случаях, для которых оператор решения прямой задачи относительно исходной модели \mathbf{m} может быть описан только алгоритмически, можно построить оператор преобразования поправок к модели $\Delta\mathbf{m}$ в поправки к наблюдениям $\Delta\mathbf{d}$ в виде явной функциональной зависимости.

1.3. Регуляризация. В общем случае обратная задача (18)

$$A\Delta\mathbf{m} = \Delta\mathbf{d}$$

является плохо обусловленной. Поэтому линейный оператор A может не удовлетворять условию (13). В этом случае нужно использовать регуляризацию. Пусть M и D

вещественные или комплексные гильбертовы пространства. Рассмотрим минимизацию параметрического функционала Тихонова

$$P^\alpha(\Delta \mathbf{m}) = \|A\Delta \mathbf{m} - \Delta \mathbf{d}\|^2 + \alpha s(\Delta \mathbf{m}) \rightarrow \min, \quad (20)$$

где $\alpha > 0$, а $s(\Delta \mathbf{m})$ — некоторый квадратичный функционал, например,

$$s(\Delta \mathbf{m}) = (W\Delta \mathbf{m}, W\Delta \mathbf{m})_M = \|W\Delta \mathbf{m}\|^2,$$

W — положительно определённый линейный непрерывный оператор в M .

Применив вариационный оператор к функционалу P^α и найдя необходимое условие его минимума, получим уравнение Эйлера:

$$A^* \Delta \mathbf{d} = (A^* A + \alpha W^* W) \Delta \mathbf{m}. \quad (21)$$

Линейный оператор

$$L^\alpha = A^* A + \alpha W^* W$$

всегда строго положительно определён, и, следовательно, уравнение Эйлера имеет единственное решение $\Delta \mathbf{m}^\alpha$, которое можно получить рассмотренным методом минимальных невязок, если положить $\mathbf{f} = A^* \Delta \mathbf{d}$ и $L = L^\alpha = A^* A + \alpha W^* W$.

Однако можно получить более эффективный регуляризованный ММН, если минимизировать параметрический функционал (20), как сделано в [2]. Окончательно регуляризованный алгоритм ММН для линейной дискретной обратной задачи на n -й итерации можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_n &= \mathbf{A} \Delta \mathbf{m}_n - \Delta \mathbf{d}, \\ \mathbf{L}_n^\alpha &= \mathbf{A}^* \mathbf{r}_n + \alpha \mathbf{W}^* \mathbf{W} \Delta \mathbf{m}_n, \\ k_n^\alpha &= \frac{\|\mathbf{L}_n^\alpha\|^2}{\|\mathbf{A} \mathbf{L}_n^\alpha\|^2 + \|\mathbf{W} \mathbf{L}_n^\alpha\|^2}, \\ \Delta \mathbf{m}_{n+1} &= \Delta \mathbf{m}_n - k_n^\alpha \mathbf{L}_n^\alpha. \end{aligned} \quad (22)$$

Для линейной дискретной задачи оператору A соответствует матрица \mathbf{A} (19), которая должна обновляться на каждой итерации. В программе предусмотрена также возможность вычисления её один раз для нескольких последовательных итераций. Начальная модель поправок $\Delta \mathbf{m}_0$ для (22) берётся в виде вектора $\partial \mathbf{m}$, см. (19). Весовая матрица модели \mathbf{W} в простейшем случае равна единичной. Начальное значение параметра адаптивной регуляризации α_0 берётся равным отношению нормы невязки к норме стабилизирующего функционала (20). Затем параметр регуляризации изменяется на каждой итерации по формуле

$$\alpha_n = \alpha_0 q^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad q > 0. \quad (23)$$

В программе взято $q = 0,75$. Процесс итераций прекращается, когда невязка достигает заданного уровня.

1.4. Блок-схема алгоритма двумерной инверсии МТ данных с учётом рельефа профиля. В качестве магнитотеллурических данных при инверсии были взяты кажущиеся сопротивления $\rho_k(x, t)$, при этом вектор данных $\mathbf{d} = \log \rho_k(x, t)$, вектор модельных параметров $\mathbf{m} = \log \rho(x, z)$, где $\rho(x, z)$ — вектор удельных сопротивлений геоэлектрического разреза. Согласно п. 1.2, для применения инверсии необходимо $MX \times MZ \times NT$ раз, исключая точки дискретной сетки модели для воздуха, решать прямую двумерную магнитотеллурическую задачу на каждой итерации, где MX, MZ

и NT — количество точек по оси x , z и периодов, соответственно. Блок-схема алгоритма двумерной инверсии изображена на рис. 1. Управление алгоритмом осуществляется файлом “Start”, в котором задаются название входного файла и основные параметры алгоритма.

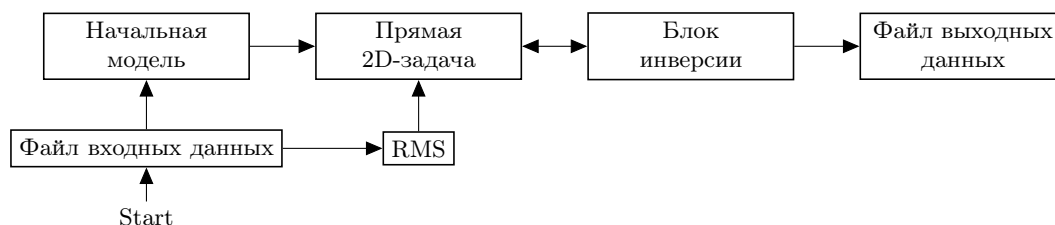


Рис. 1. Алгоритм двумерной инверсии магнитотеллурических данных с учётом рельефа профиля

Начальную модель определяет «Файл входных данных». Значения расстояний по осям x и z даны в километрах. Ось z направлена вниз. Массив PROFD несёт информацию о рельефе профиля, начиная с левой точки оси x , значение по оси z принято равным нулю. Начальное распределение сопротивлений разреза в земле либо постоянное во всех ячейках, либо привязывается к псевдоразрезу. Сопротивления в ячейках воздуха в обоих случаях берутся равными 10^8 Ом·м и в процессе итераций не изменяются. Прямая 2D-задача решается по методу конечных разностей с учётом рельефа местности путём модификации программы, подробно описанной в [3, 4]. В «Блоке инверсии» осуществлён регуляризованный алгоритм метода минимальных невязок с адаптивной регуляризацией. Невязки контролируются блоком «RMS». В блоке «Файл выходных данных» выдаются основные файлы инверсии на каждой итерации, что очень удобно для анализа результатов и прекращения процесса инверсии.

2. Тестирование алгоритма. Тестирование алгоритма проводилось на модельных данных с учётом рельефа профиля и без его учёта. Были выбраны две принципиальные модели горизонтально-слоистой геоэлектрической среды с сопротивлением 10^8 , 10^2 , 10^6 , 1 Ом·м соответственно, осложнённой рельефом поверхности: в первом случае «горой», во втором «ямой» (рис. 2). Синтетические данные моделей были получены для пятнадцати периодов в интервале 0,0026–900 с для тридцати одной точки зондирования. Важной характеристикой алгоритма является скорость сходимости в зависимости от числа итераций и устойчивость решения. Как видно на рис. 3, сходимость, полученная для данных, учитывающих изменение рельефа вдоль профиля, быстрая и ровная, и, следовательно, решение устойчиво. В то же время для данных МТЗ, смоделированных без учёта дневной поверхности, в случае с моделью «яма» сходимость хуже и медленнее, а в случае с моделью «гора» ещё и искажена на последних итерациях. Для инверсии в качестве начальной модели была использована модель полупространства с удельным сопротивлением 100 Ом·м с такой же сеткой, как в истинной модели. Характерно, что уже на 20-й итерации модельная и экспериментальная кривые для моделей с введённым массивом данных, характеризующих рельеф, различаются мало, геометрия и геоэлектрические свойства среды определяются стабильно и, в целом, верно (рис. 4).

Для модели «гора» (рис. 4, а): $X = [-0,2 : 0]$ — в эту область попадают модельные станции, лежащие внутри области изменения рельефа, $X = [-1,8 : 1,2]$ — станции на границе области, $X = [-15,0 : -2,2]$ — станции, находящиеся вдоль горизонтальной

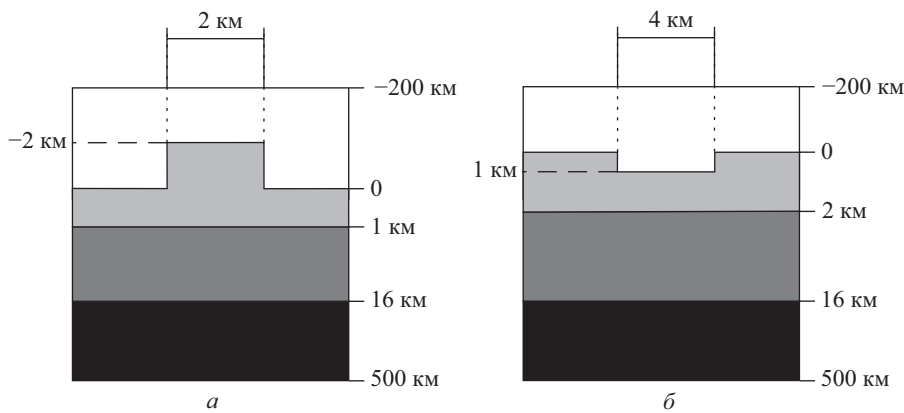


Рис. 2. Геоэлектрическая модель, осложнённая рельефом земной поверхности — горой (а) и ямой (б)

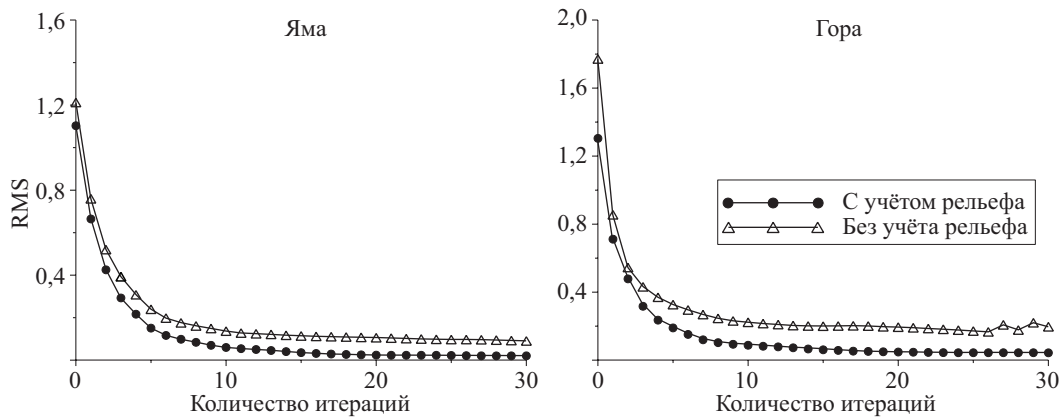


Рис. 3. Зависимость скорости сходимости от количества итераций для теоретических моделей «яма» и «гора»

поверхности. Сплошной толстой линией изображена теоретическая кривая зондирования, характерная для наблюдаемых точек.

Для модели «яма» (рис. 4, б): $X = [-0,4 : 0]$ — в эту область попадают модельные станции, лежащие внутри области изменения рельефа, $X = [-2,6 : 2,0]$ — станции на границе области, $X = [-15,0 : -3,0]$ — станции, находящиеся вдоль горизонтальной поверхности. Сплошной толстой линией изображена теоретическая кривая зондирования, характерная для наблюдаемых точек. Как видно на рисунке, наиболее проблемной областью являются точки зондирования, находящиеся в непосредственной близости от внесённых в модель геоморфологических элементов. Кажущееся сопротивление слоя, лежащего непосредственно под «горой» или «ямой», занижено, а форма наблюдаемой кривой наиболее искажена относительно модельной.

Аналогичные построения были выполнены для моделей без учёта рельефа.

Модель «гора». Для кривых точек зондирования, попадающих в интервал $[-0,2 : 0]$, характерно завышение ширины слоя сопротивлением 10^8 Ом · м. Следующий за ним слой с сопротивлением 100 Ом · м выглядит весьма неоднородно с экстремумом в середине, в то же время ширина слоя с сопротивлением 10^6 Ом · м меньше модельной, а его

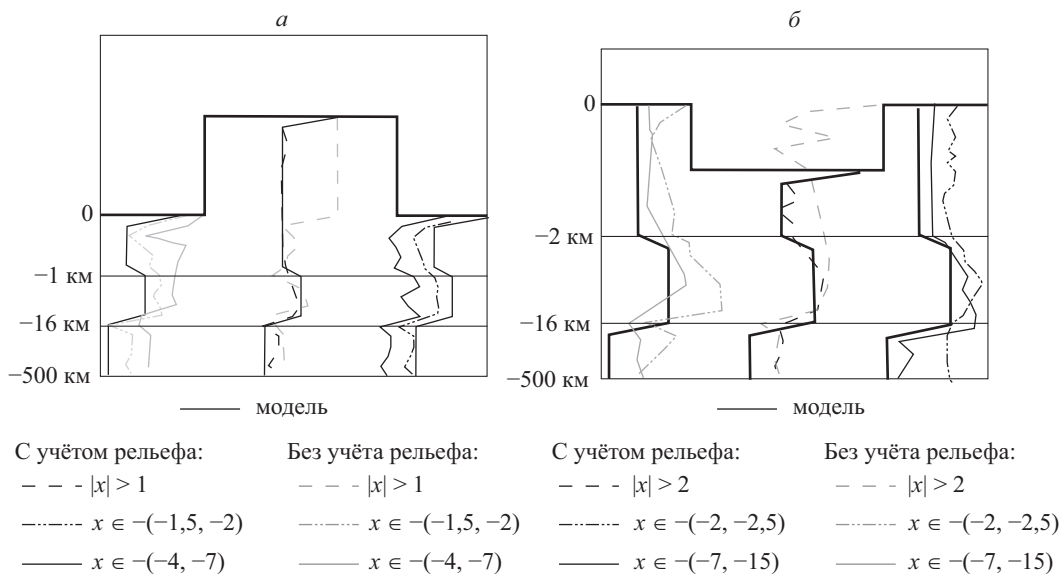


Рис. 4. Графики логарифма кажущегося сопротивления для моделей «гора» (а) и «яма» (б) с учётом и без учёта рельефа

сопротивление превышает заданное значение. Для интервала станций зондирования $X = [-2 : 1,5]$, находящихся на минимальном удалении от элемента рельефа, характерно максимальное искажение формы кривой зондирования. Максимально совпадающим с теоретической кривой является интервал, соответствующий слою с сопротивлением $10^8 \text{ Ом} \cdot \text{м}$. Интервал, соответствующий слою $100 \text{ Ом} \cdot \text{м}$, выглядит незначительным по ширине минимумом кривой сопротивления. Слой с сопротивлением $10^6 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ в отражении кривой МТЗ смещён от центра и значительно шире, чем модельный. Наибольшего совпадения теоретической и модельной кривых зондирования удалось достичь в интервале $X = [-5,0 : -4,0]$, где расположены точки зондирования, на которые возмущающий геоморфологический элемент производит минимальный эффект.

Модель «яма». Наибольшее искажение модельной кривой приходится на интервал, находящийся непосредственно на участке со структурным элементом «яма», где $X = [-0,2 : 0]$. В этом случае для модельной кривой зондирования ширина слоя с сопротивлением $10^8 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ существенно меньше, чем для теоретической кривой, а сам слой оказывается разбитым на два участка с удельным сопротивлением 10^8 и $10^6 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ соответственно. Отклик от модельного слоя $10^6 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ «размазан» по интерпретационной кривой и перекрывает два интервала: собственно от самого слоя и от слоя с сопротивлением в $100 \text{ Ом} \cdot \text{м}$. Кривые зондирования точек, расположенных в пределах $X = [-15,0 : -7,0]$, дают неплохой результат. Однако необходимо отметить, что в пределах данной области амплитуда экспериментальной кривой завышена относительно теоретической. В последнем слое модели добавляется участок высокого сопротивления, около $1000 \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

Для представления результатов инверсии использовалась программа Surfer, существенным недостатком которой является использование интерполяции для создания рисунка. Чтобы избежать искажений в полученных результатах, данные отображались в виде групп сопротивлений, относящихся к разным разрядам, в различной серой градации.

Рассмотрим результирующие разрезы моделей «гора» (рис. 5) и «яма» (рис. 6) с учётом и без учёта рельефа. Минимальная RMS результирующих разрезов 2D-инверсии для модели «гора» с учётом рельефа составила 0,03, а без учёта 0,17. Для модели «яма» — 0,02 и 0,09 соответственно. Результирующие разрезы моделей «гора», «яма» позволяют сделать вывод, что для моделей с учётом рельефа максимальная разрешающая способность 2D-инверсии снижается в краевой области аномалий дневной поверхности. Скорее всего, это связано с сильным искажением поля на границе диэлек-

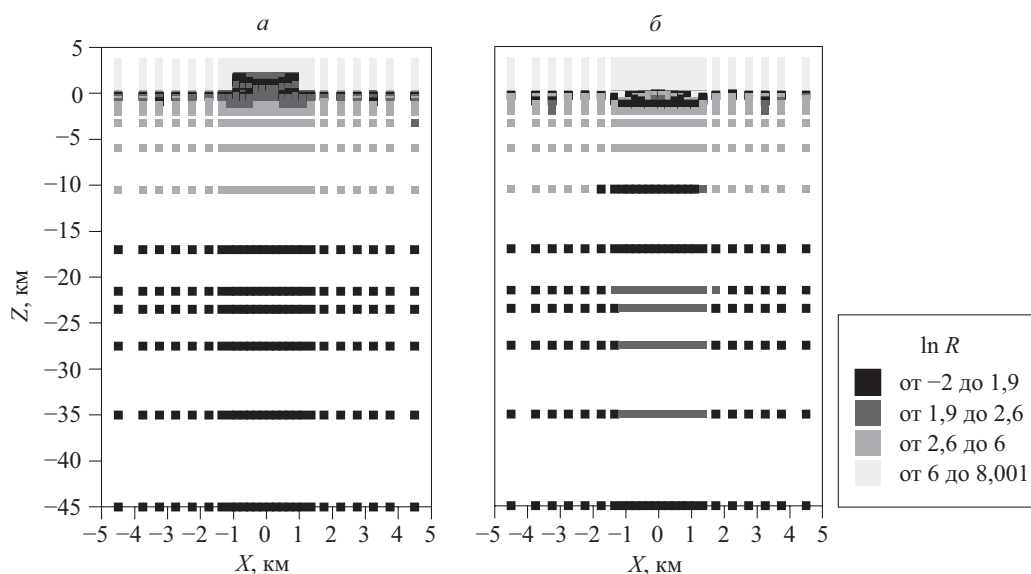


Рис. 5. Результирующие разрезы модели «гора» с учётом (а) и без учёта (б) рельефа

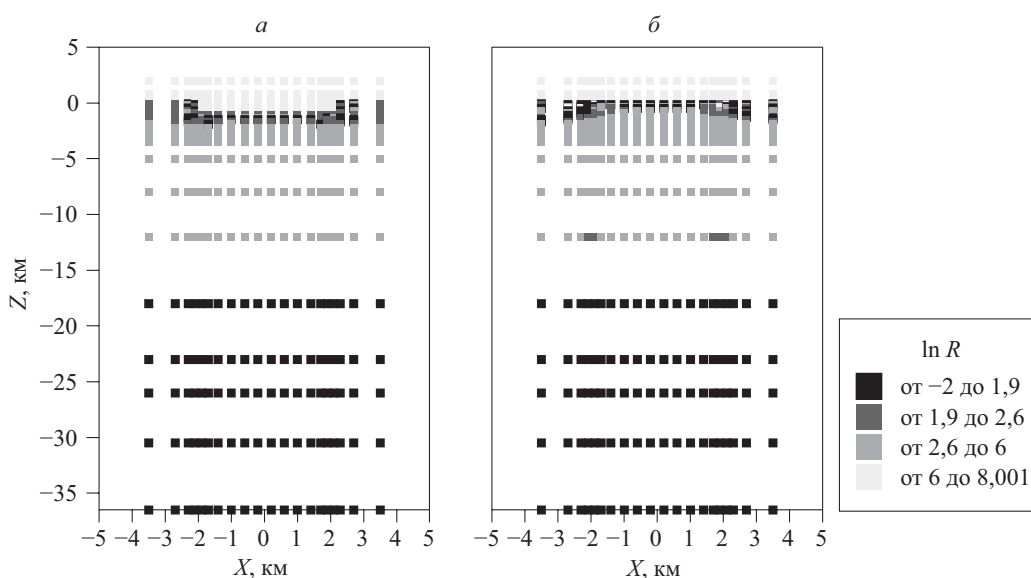


Рис. 6. Результирующие разрезы модели «яма» с учётом (а) и без учёта (б) рельефа

трика и пород, имеющих на несколько порядков меньшее сопротивление. Однако все три слоя, заданные в моделях, их глубина и мощность определены точно. Геоэлектрические разрезы, вычисленные без введения информации о рельефе, имеют множество недостатков, не позволяющих проводить верную интерпретацию. Особенно ярко последнее замечание отражено в разрезах модели «гора». Здесь искажения затронули не только относительно приповерхностную зону (до 2,5 км), как в модели «яма», но и весь глубинный разрез под возмущающим структурным элементом. Результирующий разрез модели «яма» в этом свете более информативен, однако геоморфологическая структура модели редуцирована.

Выводы.

1. Полученные результаты указывают на проблемы при интерпретации данных МТЗ без учёта рельефа. Искажения результатов зондирования, полученные в результате такого подхода, не только осложняют исходную модель, но и могут привести к полному непониманию реальной геоэлектрической картины и, соответственно, к ошибкам в геологической расшифровке полученных результатов.

2. Рассмотренная двумерная инверсия магнитотеллурических данных, учитывающая изменение рельефа на профиле, позволяет устранить указанные недостатки и определить такие параметры модели, как мощность и расположение горизонтов в сложных геоморфологических условиях.

3. Разработанный алгоритм двумерной инверсии МТ данных на профиле с изменением рельефа и соответствующая ему программа могут быть использованы при планировании эксперимента и обработке полевых данных в районах с гористым рельефом.

Литература

1. Бердичевский М. Н., Яковлев А. Г., Александрова Е. Д. и др. Технология и результаты региональных магнитотеллурических исследований // Разведка и охрана недр. 2004. Вып. 5, № 16. С. 37–40.
2. Жданов М. С. Теория обратных задач и регуляризации в геофизике. М.: Научный мир, 2007. 710 с.
3. Вардьянц И. Л. Расчёты методом сеток магнитотеллурических полей над двумерно-неоднородными средами (часть I) // Вопросы геофизики. Л., 1978. Вып. 27. С. 36–40.
4. Вардьянц И. Л. Расчёты методом сеток магнитотеллурических полей над двумерно-неоднородными средами (часть II) // Вопросы геофизики. Л., 1979. Вып. 28. С. 153–163.

Статья поступила в редакцию 6 марта 2013 г.