

Ю. В. Киселев, В. Н. Троян

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИОННОЙ ТОМОГРАФИИ

Прогресс в развитии вычислительной техники позволяет рассматривать постановки геофизических задач, решение которых связано с большим объемом вычислений. К такого рода задачам можно отнести широкий круг задач, объединенных общим названием *томографические*. Результатом решения подобных задач является восстановление пространственной функции целевого параметра по набору данных, связанных с его интегральным пространственным проявлением.

В лучевой томографии, базирующейся в значительной степени на моделях лучевого распространения зондирующих сигналов, для восстановления полей параметров среды используются различные модификации преобразования Радона [1, 2]. При этом исходными данными для восстановления параметров среды могут быть времена задержек сейсмических сигналов или их поглощение, несущие информацию о параметрах среды, локализованных вдоль конкретного луча (лучей). Отличительной особенностью дифракционной сейсмической томографии [3–11], доставляющей решение линеаризованной обратной динамической задачи, является более полное использование информации, содержащейся в отсчетных значениях сейсмограммы, когда исходными данными служит фактически полное поле.

В предлагаемой работе линеаризация осуществляется в рамках приближения Борна, которое обладает большей технологичностью в случае многоволнового характера регистрируемых волновых полей, чем приближение Рытова, а также позволяет рассматривать целевые объекты большей контрастности [6, 12, 13]. Для оценивания ошибок, вносимых линеаризацией, естественно обратиться к методам численного моделирования с точным решением прямой задачи [13] (или с решением прямой задачи при гарантированной точности [14]). При этом появляется возможность исследовать эффективность различных приближенных подходов определения параметров среды. В работе [13] для исследования влияния линеаризации рассматривалось точное решение задачи дифракции на цилиндре для скалярного волнового уравнения. Точность восстановления упругих параметров объектов различной степени сложности в случае двумерной *SH* задачи исследована в работе [14] с привлечением конечно-разностного метода для моделирования процесса распространения волн. Показано, что в случае поверхностных схем наблюдения и небольшом числе пар источник – приемник (2 – 9 пар), локальные неоднородности упругих параметров с размерами $1-2 \lambda_s$ при скоростной контрастности 20 % (по отношению к опорной среде) восстанавливаются с ошибкой 10–20 %. С увеличением контрастности до 40–80 % ошибка восстановления возрастает до 40–50 %.

В предлагаемой работе на примере восстановления локальных ($\sim 2\lambda_s$) возмущений упругих параметров λ , μ и массовой плотности ρ демонстрируются возможности метода дифракционной томографии, основанные на особенностях рассеяния волнового поля возмущениями сейсмических параметров среды. Прямая *SV*-задача для поверхностного расположения источников и точек наблюдения решается конечно-разностным методом, что позволяет корректно учесть процесс дифракции на локальных неоднородностях со сложной геометрией, расположенных во вмещающей среде с внутренними границами. Демонстрируется возможность “раздельного” вос-

становления параметров λ , μ и ρ для случаев параметрического и непараметрического описания пространственных функций искомых параметров, что позволяет определять как скоростную характеристику среды, так и величину γ — отношение скорости распространения поперечных волн к продольным. Выписаны приближенные выражения для томографических функционалов, описывающих процесс рассеяния волнового поля элементарными возмущениями параметров среды, что позволяет оценивать информативность томографического эксперимента относительно того или иного восстанавливаемого параметра. При этом упомянутые выражения дают возможность вычислять рассеянное волновое поле не только в дальней зоне [15], но и в случае “не слишком больших” удалений источника и точки наблюдения от рассеивающего объекта, когда процесс распространения волнового поля в опорной среде может быть описан в рамках лучевого метода с учетом последующих его приближений.

1. Основные уравнения и алгоритмы восстановления параметров среды

Численное моделирование для определения параметров локальных неоднородностей с плавным изменением упругих параметров λ , μ и массовой плотности ρ проводится для двумерной модели упругой среды, содержащей свободную поверхность и плоскопараллельные границы раздела, на которых упругие параметры испытывают разрыв. При этом предполагается, что в окрестности таких границ среда является однородной.

Источник сейсмических колебаний $\hat{\mathbf{f}} \equiv \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, t)$, расположенный в точке $(x = x_s, z = z_s)$ декартовой системы координат $(x, y, z; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, возбуждает волновое поле $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(x, z, t) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющее уравнению

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \hat{\mathbf{f}} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \mu \times \mathbf{u} + 2(\nabla \mu \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (1)$$

в областях с непрерывным изменением упругих параметров $\lambda = \lambda(\mathbf{x})$, $\mu = \mu(\mathbf{x})$ и $\rho = \rho(\mathbf{x})$ и их первых производных, и граничным условиям на свободной поверхности ($z = 0$)

$$t_z|_{z=0} = 0 \quad (2)$$

(равенство нулю напряжений) и на внутренних границах ($z = z_i$)

$$\mathbf{u}|_{z=z_i-0} = \mathbf{u}|_{z=z_i+0}, \quad t_z|_{z=z_i-0} = t_z|_{z=z_i+0} \quad (3)$$

Волновое поле \mathbf{u} возбуждается плотностями сил $\hat{\mathbf{f}}$ вида

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}} &\equiv \hat{\mathbf{f}}(x_s, z_s, t) = \delta(x - x_s) \delta(z - z_s) f(t) \mathbf{e}_3, \\ \hat{\mathbf{f}}_1 &\equiv \hat{\mathbf{f}}_1(x_r, z_r, t) = \delta(x - x_r) \delta(z - z_r) \delta(t) \mathbf{e}_1, \\ \hat{\mathbf{f}}_3 &\equiv \hat{\mathbf{f}}_3(x_r, z_r, t) = \delta(x - x_r) \delta(z - z_r) \delta(t) \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (4)$$

с временными зависимостями $f(t)$ и $\delta(t)$ ($\delta(t)$ — дельта-функция Дирака), расположенными в точке возбуждения $\mathbf{x} = (x_s, z_s)$ и приема $\mathbf{x} = (x_r, z_r)$. Скорости распространения продольной (v_p) и поперечной (v_s) волн выражаются через λ , μ , ρ следующим образом:

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (5)$$

Кратко, следуя [11, 16], опишем алгоритм решения обратной задачи. Волновое поле $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ в искомой упругой среде $(\lambda(\mathbf{x}), \mu(\mathbf{x}), \rho(\mathbf{x}))$ дается решением уравнения

$$L\mathbf{u} = -\hat{\mathbf{f}}, \quad L\mathbf{u} = (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} + \nabla\lambda\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla\mu \times \mathbf{u} + 2(\nabla\mu \cdot \nabla)\mathbf{u} - \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (6)$$

с граничными условиями (2), (3), при этом полагается известной опорная среда $(\lambda_0(\mathbf{x}), \mu_0(\mathbf{x}), \rho_0(\mathbf{x}))$, волновое поле $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$ в которой удовлетворяет уравнению

$$L_0\mathbf{u}_0 = -\hat{\mathbf{f}}, \quad L_0\mathbf{u}_0 = (\lambda_0 + \mu_0)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}_0 + \\ + \mu_0\Delta\mathbf{u}_0 + \nabla\lambda_0\nabla \cdot \mathbf{u}_0 + \nabla\mu_0 \times \mathbf{u}_0 + 2(\nabla\mu_0 \cdot \nabla)\mathbf{u}_0 - \rho_0\frac{\partial^2\mathbf{u}_0}{\partial t^2} \quad (7)$$

и граничным условиям (2), (3). Величины $\delta\lambda = \lambda - \lambda_0$, $\delta\mu = \mu - \mu_0$ и $\delta\rho = \rho - \rho_0$ отличны от нуля в ограниченных пространственных областях и равны нулю в окрестности свободной границы и внутренних границ. Полагая величины $\delta\lambda$, $\delta\mu$ и $\delta\rho$ малыми, можно записать приближенное равенство (приближение Борна)

$$L_0\delta\mathbf{u} \approx -\delta L\mathbf{u}_0, \quad (8)$$

где $\delta\mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$ - разностное поле, а величину

$$\delta L\mathbf{u}_0 = \nabla \times (\delta\mu\nabla \times \mathbf{u}_0) + 2 \sum_{j=1,3} \nabla \cdot (\delta\mu\nabla u_{0j})\mathbf{e}_j + \nabla(\delta\lambda\nabla \cdot \mathbf{u}_0) - \delta\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}_0}{\partial t^2} \quad (9)$$

можно рассматривать как источник такого поля.

Представим компоненты разностного поля δu_i из (8) в точке наблюдения $\mathbf{x} = \mathbf{x}_r$ в виде

$$\delta u_i(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) = \int_S \int_0^\infty \tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, t - \tau) \cdot \delta L\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \tau) d\tau d\mathbf{x}, \quad (10)$$

где внешнее интегрирование осуществляется по некоторой области S , содержащей источник разностного поля (9), а $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, t)$ и $\tilde{\mathbf{u}}_i \equiv \tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, t)$ удовлетворяют соответственно уравнениям (с источниками из (4))

$$L_0\mathbf{u} = -\hat{\mathbf{f}} \quad (11)$$

и

$$L_0\tilde{\mathbf{u}}_i = -\hat{\mathbf{f}}_i \quad (i = 1, 3), \quad (12)$$

а также граничным условиям (2), (3).

Вводя томографические функционалы

$$p_i^\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_s, t) = - \int_0^\infty \tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, t - \tau) \cdot \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \tau) d\tau, \\ p_i^\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) = - \int_0^\infty \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, t - \tau) \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \tau) d\tau, \quad (13) \\ p_i^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) = + \int_0^\infty [\nabla \times \tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, t - \tau) \cdot \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \tau) - \\ - 2 \sum_{j=1,3} \nabla \tilde{u}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, t - \tau) \cdot \nabla u_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \tau)] d\tau,$$

компоненты разностного поля δu_i (10) можно записать в виде

$$\delta u_i(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) = \int_S [\delta\lambda(\mathbf{x})p_i^\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) + \delta\mu(\mathbf{x})p_i^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) + \delta\rho(\mathbf{x})p_i^\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t)]d\mathbf{x}. \quad (14)$$

Отметим, что величины p_i^λ , p_i^ρ и p_i^μ получены в [11, 16] в предположении локального характера отличий ($\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\rho$) параметров искомой среды λ , μ , ρ от параметров опорной среды λ_0 , μ_0 , ρ_0 .

Искомые величины $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\rho$ будем находить, решая интегральное уравнение (14) в предположении линейных связей между искомыми параметрами среды:

$$\delta\lambda(\mathbf{x}) = c_\lambda\delta\mu(\mathbf{x}), \quad \delta\rho(\mathbf{x}) = c_\rho\delta\mu(\mathbf{x}). \quad (15)$$

Теперь уравнение (14) можно записать в виде

$$\delta u_i(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) \approx \int_S [c_\lambda p_i^\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) + p_i^\mu(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) + c_\rho p_i^\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t)] \delta\mu(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \quad (16)$$

В случае известных значений c_λ и c_ρ , например, когда $\gamma = v_s/v_p$ опорной среды равна γ неоднородности и имеет место эмпирическая зависимость [17]

$$\rho = av_p^{1/4}, \quad [v_p] = [m/c], \quad a = 0,31, \quad v_p = v_s/\gamma \quad (17)$$

(где v_p и v_s — скорости распространения продольной и поперечной волн (5) соответственно), коэффициенты c_λ и c_ρ можно представить в виде

$$c_\lambda = (1 - 2\gamma^2)/\gamma^2, \quad c_\rho = d\rho/d\mu, \quad (18)$$

где $c_\rho = d\rho/d\mu$ — производная ρ по μ , вычисленная с учетом (17) для значений упругих параметров, отвечающих опорной среде. Таким образом, определению подлежит только величина $\delta\mu(\mathbf{x})$.

В этом случае после дискретизации уравнения (16) получаем систему линейных уравнений относительно вектора \mathbf{d}_μ искомых значений $\delta\mu(\mathbf{x})$

$$\mathbf{P}\mathbf{d}_\mu = \mathbf{d}_u, \quad (19)$$

где \mathbf{d}_u — временные отсчеты компонент волнового поля, рассеянного неоднородностью. Решение системы линейных уравнений (19) находим, минимизируя сумму квадратов расхождений левой и правой частей (19), что с учетом принятой регуляризации приводит к системе линейных уравнений

$$[\mathbf{P}'\mathbf{P} + \alpha_1(\mathbf{B}'_z\mathbf{B}_z + \mathbf{B}'_x\mathbf{B}_x) + \alpha_2\mathbf{C}'\mathbf{C} + \alpha_3\mathbf{D}'\mathbf{D}]\mathbf{d}_\mu = \mathbf{P}'\mathbf{d}_u. \quad (20)$$

В (20) α_1 , α_2 , α_3 — регуляризирующие коэффициенты; \mathbf{B}_z и \mathbf{B}_x — конечно-разностные аналоги вторых частных производных соответственно по переменным x и z ; \mathbf{C} и \mathbf{D} — “штрафные” матрицы на ненулевые значения искомых величин (\mathbf{d}_μ) в граничных точках и в окрестности граничных точек исследуемой области S соответственно.

Минимизация квадратов невязок левой и правой частей (19), как будет показано ниже, позволяет находить также и коэффициенты c_λ и c_ρ . При этом мы многократно решаем систему уравнений (20), а минимум такой невязки (и отвечающие ему значения c_λ , c_ρ и $\delta\mu(\mathbf{x})$) находим градиентным методом. Отметим, что возможность

определения c_λ позволяет вычислять γ — отношение скорости поперечных волн к продольным.

Будут представлены результаты определения параметров неоднородности при параметрическом ее задании. В этом случае для минимизации суммы квадратов разностей левой и правой частей (19) также используется градиентный метод.

2. Лучевое представление рассеянного поля

В рассмотренных выше алгоритмах элементы матрицы P (19) составлены из томографических функционалов $p_i^0, p_i^\mu, p_i^\lambda$ (13), вычисление которых содержит дифференциальные операции от полей u и \tilde{u}_i из (11), (12), что приводит по крайней мере к усложнению алгоритмов, реализующих метод дифракционной томографии. Кроме того, на практике волновые поля u и \tilde{u}_i будут вычисляться тем или иным приближенным методом. Поскольку лучевой метод в настоящее время является основным инструментом при решении задач сейсморазведки, ниже даны формулы для томографических функционалов (13), записанные в виде, характерном для лучевого разложения. Подобные формулы, на наш взгляд, обладают заметными алгоритмическими преимуществами по сравнению с выражениями из [15], описывающими рассеяние на элементарном излучателе в дальней зоне.

Компоненты волнового поля $\delta u_i(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t)$ ($i = 1, 2, 3$)*, рассеянного локальной неоднородностью $(\delta\lambda, \delta\mu, \delta\rho)$, при падении на нее волны $u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, t)$ даются выражениями (14), (13). В приближении лучевого метода волновые поля $\tilde{u}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, t)$, $u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, t)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=p,s} \tilde{A}_{iqj}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r, t) \tilde{f}_j(t - \tilde{\tau}_q) \quad (i = 1, 2, 3), \\ u(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=p,s} A_{qj}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s, t) f_j(t - \tau_q), \\ f_j(t) &= f'_{j+1}(t), \quad \tilde{f}_j(t) = \tilde{f}'_{j+1}(t), \end{aligned} \quad (21)$$

где $\tilde{\tau}_q \equiv \tilde{\tau}_q(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r)$ ($\tau_q \equiv \tau_q(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s)$) — время распространения волны от точки \mathbf{x}_r , (\mathbf{x}_s) до точки \mathbf{x} . Подставляя выражения для полей (21) в (13), запишем величины $p_i^0, p_i^\lambda, p_i^\mu$ в виде лучевого ряда

$$\begin{aligned} p_i^0 &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=p,s} \sum_{q'=p,s} p_{iqq'j}^0 \phi_j(t - \tilde{\tau}_q - \tau_{q'}), \\ p_i^\lambda &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=p,s} \sum_{q'=p,s} p_{iqq'j}^\lambda \phi_j(t - \tilde{\tau}_q - \tau_{q'}), \\ p_i^\mu &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=p,s} \sum_{q'=p,s} p_{iqq'j}^\mu \phi_j(t - \tilde{\tau}_q - \tau_{q'}), \\ \phi_j(t) &= \phi'_{j+1}(t), \quad \phi_0(t) = \frac{d^2}{dt^2} \int_0^\infty \tilde{f}_0(t - \tau) f_0(\tau) d\tau \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (22)$$

* При рассмотрении лучевого разложения томографических функционалов изложение ведется для трехмерного аналога рассматриваемой задачи. Здесь и далее индекс пространственной координаты будет принимать значения 1, 2, 3.

при этом амплитудные множители $P_{iqq'j}^\lambda, P_{iqq'j}^\mu, P_{iqq'j}^\rho$ ($j = 0$) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} P_{iqq'0}^\rho &= -(\tilde{\mathbf{A}}_{iq0} \cdot \mathbf{A}_{q'0}), \quad P_{iqq'0}^\lambda = -(\tilde{\mathbf{A}}_{iq0} \cdot \nabla \tilde{\tau}_q)(\mathbf{A}_{q'0} \cdot \nabla \tau_{q'}), \\ P_{iqq'0}^\mu &= [\nabla \tilde{\tau}_q \times \tilde{\mathbf{A}}_{iq0}] \cdot [\nabla \tau_{q'} \times \mathbf{A}_{q'0}] - 2(\tilde{\mathbf{A}}_{iq0} \cdot \mathbf{A}_{q'0})(\nabla \tilde{\tau}_q \cdot \nabla \tau_{q'}). \end{aligned} \quad (23)$$

Следует ожидать, что применение формул (23) для решения обратной сейсмической задачи методом дифракционной томографии (в случае слабонеоднородной опорной среды) даст удовлетворительные результаты при “не слишком малых” расстояниях от источника колебаний и точки наблюдения до исследуемой области пространства. В противном случае необходимо включать в рассмотрение следующие члены лучевого ряда. Формулы (23) можно использовать для определения информативности схем наблюдения при определении тех или иных параметров среды.

Кратко остановимся на интерпретации формул (22), (23) с точки зрения описания рассеяния волнового поля элементарной неоднородностью в дальней зоне*. Если источник или точка наблюдения удалены на достаточно большое расстояние от элементарного излучателя ($\delta\lambda, \delta\mu, \delta\rho$) с размерами много меньше длины волны, то компоненты рассеянного поля δu_i (14), представляя томографические функционалы формулами (22), (23), приближенно можно записать в виде

$$\begin{aligned} \delta u_i(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_r, t) &\approx \sum_{q=p,s} \sum_{q'=p,s} \left\{ -(\tilde{\mathbf{A}}_{iq0} \cdot \mathbf{A}_{q'0}) \bar{\delta\rho} - (\tilde{\mathbf{A}}_{iq0} \cdot \nabla \tilde{\tau}_q)(\mathbf{A}_{q'0} \cdot \nabla \tau_{q'}) \bar{\delta\lambda} + \right. \\ &\left. + \left[(\nabla \tilde{\tau}_q \times \tilde{\mathbf{A}}_{iq0}) \cdot (\nabla \tau_{q'} \times \mathbf{A}_{q'0}) - 2(\tilde{\mathbf{A}}_{iq0} \cdot \mathbf{A}_{q'0})(\nabla \tilde{\tau}_q \cdot \nabla \tau_{q'}) \right] \bar{\delta\mu} \right\} \phi_0(t - \tilde{\tau}_q - \tau_{q'}), \end{aligned} \quad (24)$$

где $\bar{\delta\lambda}, \bar{\delta\mu}$ и $\bar{\delta\rho}$ — результат интегрирования возмущений среды $\delta\lambda, \delta\mu$ и $\delta\rho$ по элементарному объему dx . Множители при $\bar{\delta\lambda}, \bar{\delta\mu}$ и $\bar{\delta\rho}$ в (24) описывают процесс рассеяния соответствующими элементарными возмущениями среды, особенности которого иллюстрируют диаграммы рассеяния (для $\delta\rho$ и $\delta\mu$), представленные на рис. 1. Рассеяние на элементарном возмущении $\delta\lambda$ является изотропным.

Как следует из анализа правой части выражения (24) (см. также рис. 1), различные временные отрезки записи волнового поля могут порождаться различными типами рассеивателей. Например, при наблюдении рассеяния в направлении, перпендикулярном по отношению к падающим p - и s -волнам (в плоскости амплитудного вектора падающей s -волны) рассеянные pp -волны порождаются возмущением $\delta\lambda$, ps - и sr -волны связаны с возмущением плотности $\delta\rho$, а возмущение модуля сдвига $\delta\mu$ приводит к появлению ss -волн.

На рис. 2 представлены результаты моделирования рассеяния волнового поля, возбужденного источником типа сосредоточенной силы (направленной вдоль оси z), на неоднородности с центральной симметрией, с радиусом $\sim \lambda_s = v_s T_0$, расположенной в однородном пространстве (максимальная контрастность по скорости относительно опорной среды $\sim 20\%$) на расстоянии $5\lambda_s$ от начала координат. Кривая 1 получена моделированием процесса рассеяния конечно-разностным методом. Кривая 2 — результат вычисления “разностного” поля δu_i (14) по формулам (13) с использованием конечно-разностного метода для вычисления полей \mathbf{u}, \tilde{u}_i (11), (12). Кривая 3 — результат вычисления поля δu_i (14) по формулам (22) с учетом только нулевых членов ($j = 0$, (23)). На рис. 2, а цифрами I, II и III отмечены участки волнового

*Достаточно подробное исследование рассеяния в дальней зоне с многочисленными иллюстрациями можно найти в [15].

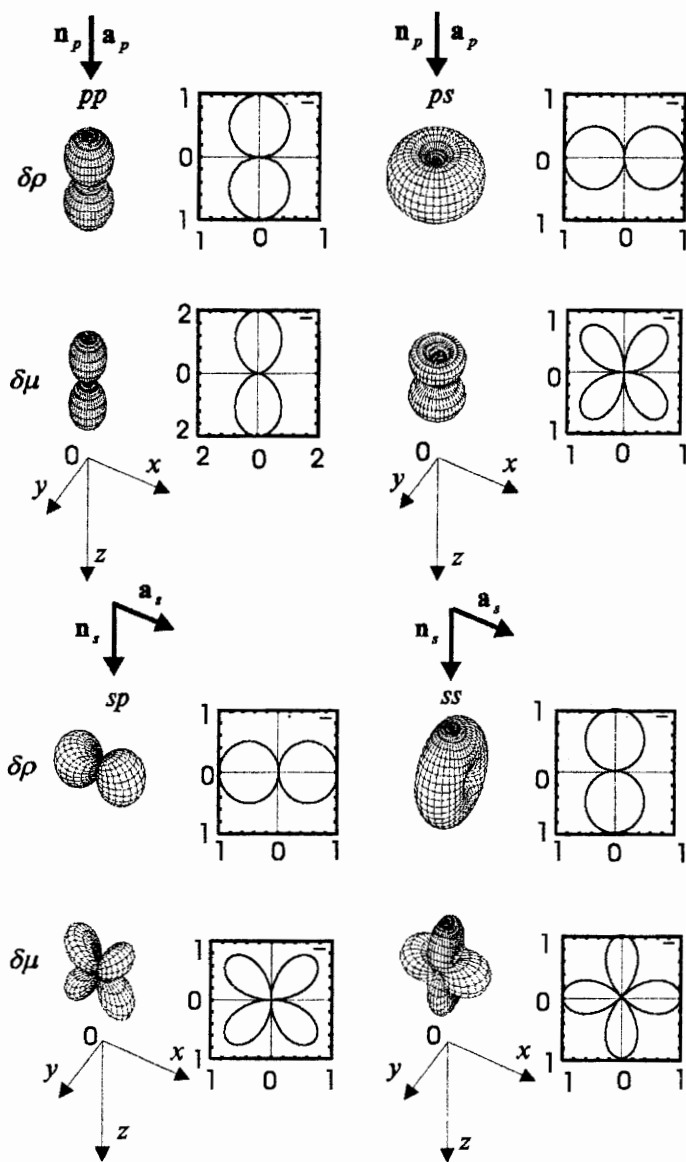


Рис. 1. Диаграммы рассеяния продольной и поперечной волн на элементарных рассеивателях.

Справа от пространственного изображения диаграмм дано их сечение в плоскости (x, z) ; n_q и a_q — соответственно нормаль к фронту и единичный амплитудный вектор падающей на элементарную неоднородность q -волны ($q = p, s$).

поля, связанные с pp -, ps - (sp -) и ss -волнами соответственно. Как следует из анализа волнового поля, pp -волны (I) и ps -, sp -волны (II) в основном порождаются возмущениями $\delta\lambda$ и $\delta\rho$ соответственно, а $\delta\mu$ практически полностью формирует поле ss -волн (III). Вклад последующих членов лучевого ряда особенно ярко проявляется в случае рассеяния для совмещенных точек возбуждения и наблюдения (рис. 2, б): волновое

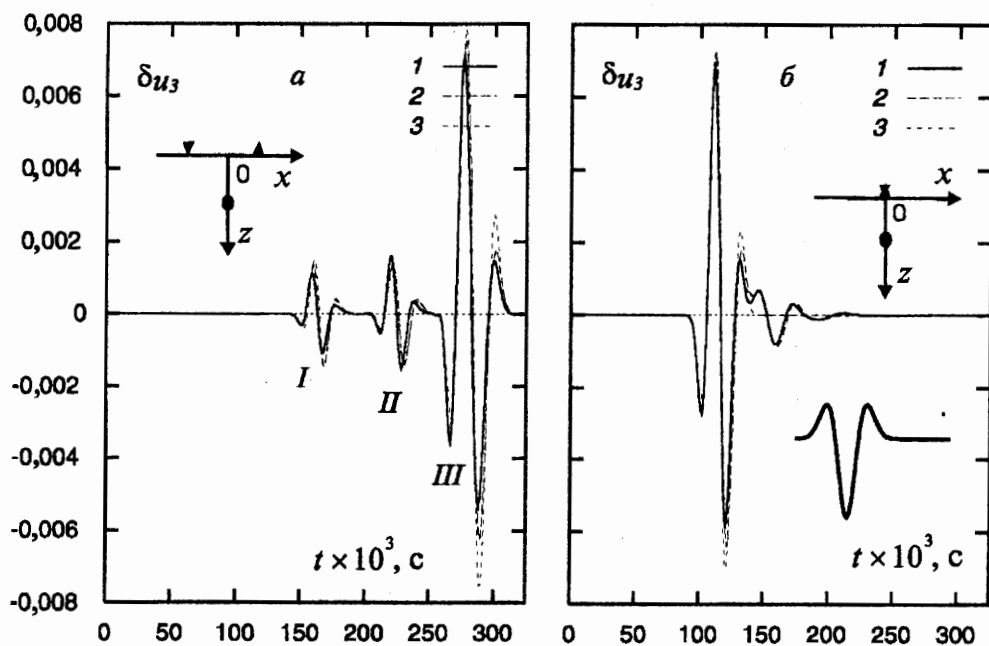


Рис. 2. Моделирование рассеяния на симметричной неоднородности.

Расстояния от начала координат до точек возбуждения и наблюдения равны расстоянию от начала координат до центра неоднородности (а). Точки возбуждения и наблюдения расположены в начале координат (б). Рассеянное волновое поле вычислено: конечно-разностным методом (1); в приближении Борна с волновыми полями, вычисленными конечно-разностным методом (2) и с использованием нулевого приближения лучевого метода (3). Зависимость от времени воздействия в источнике — б.

образование в конечной части сигнала, представленное кривыми 1 и 2, полностью отсутствует при описании рассеяния в нулевом приближении — кривая 3.

3. Численное моделирование восстановления параметров среды

Для решения прямой задачи (1) – (3) используются явная разностная схема на прямоугольной сетке с одинаковым шагом по пространственным переменным [18].

Зависимость воздействия точечного источника (4), (11) от времени t имеет вид импульса Риккера [17] со спектральной функцией

$$F(\omega) = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \exp\left\{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\} \exp\left\{-\frac{i2\pi\omega}{\omega_0}\right\}, \quad (25)$$

при этом кажущаяся частота f_0 полагается равной $f_0 = \omega_0/2\pi = 50$ Гц.

Точность применяемой конечно-разностной схемы в классе кусочно-однородных сред оценивалась путем сравнения с методом контурных интегралов [19]. В случае величины шага по времени $l = 0,0005$ с (40 отсчетов на кажущийся период $T_0 = 1/f_0$) относительная величина расхождения в большинстве случаев не превышала 5 %, в отдельных же случаях достигала 8 %.

Точность решения прямой задачи в присутствии локальной неоднородности, задаваемой величиной

$$\delta\mu(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0,25\mu_m \left[1 + \cos\left(\pi \frac{x-\hat{x}}{\Delta_x}\right) \right] \left[1 + \cos\left(\pi \frac{z-\hat{z}}{\Delta_z}\right) \right], & \text{если } |x-\hat{x}| < \Delta_x \text{ и } |z-\hat{z}| < \Delta_z, \\ 0, & \text{если } |x-\hat{x}| > \Delta_x \text{ или } |z-\hat{z}| > \Delta_z, \end{cases} \quad (26)$$

где (\hat{x}, \hat{z}) — положение максимального μ_m значения отклонения величины $\mu(\mathbf{x})$ от значения $\mu_0(\mathbf{x})$ в опорной модели, а Δ_x и Δ_z характеризуют размер такой неоднородности в горизонтальном (e_1) и вертикальном (e_3) направлениях соответственно, оценивается по внутренней сходимости. При этом в случае $\Delta_x = \Delta_z \approx \lambda_s = v_s T_0$ и параметров неоднородности, используемых в дальнейшем, уменьшение шага по времени l в два раза по отношению к величине шага, используемого при моделировании, приводит к относительному расхождению между результатами вычислений дифрагированного поля на 2–5 %. С учетом проведенного тестирования моделирование проводится для величин шага по времени $l = 0,0005$ с (40 отсчетов на кажущийся период T_0).

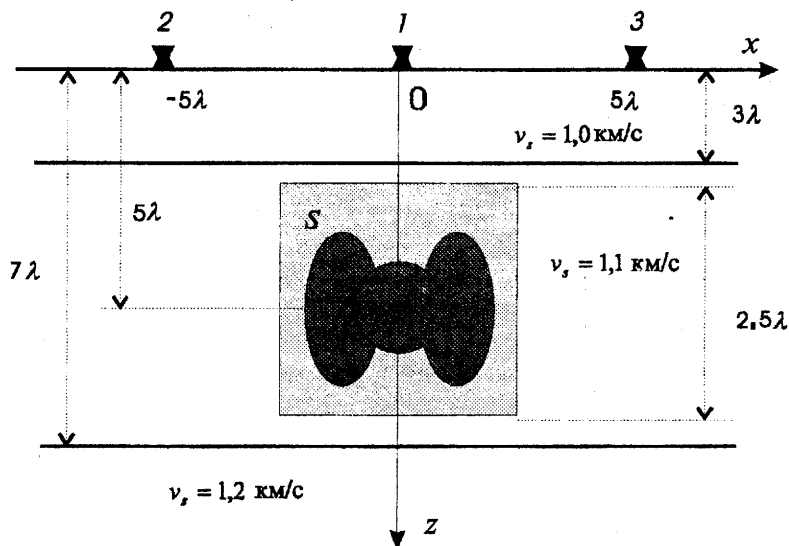


Рис. 3. Модель среды и схема наблюдения.

1–3 — точки наблюдения и возбуждения волнового поля; S — область восстановления параметров среды; $\lambda \equiv \lambda_s = 0,02$ км.

Для создания локальных неоднородностей используется простая аналитическая зависимость (26). При этом полагается, что $\gamma = v_s/v_p = 1/\sqrt{3}$ ($\lambda = \mu$), а ρ и μ удовлетворяют эмпирической зависимости (17). Расположение восстанавливаемой неоднородности и область восстановления S изображены на рис. 3. Рассматриваемые здесь неоднородности со сложной геометрией получены суммированием значений параметров, даваемых моделью (26). Модель неоднородности, выделенная на рис. 3 более

темным цветом, составлена из трех зависимостей (26) со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \hat{x}_0, & \hat{z}_1 &= \hat{z}_0 & (\Delta_x = \Delta_z = 0, 45\lambda_s), \\ \hat{x}_2 &= \hat{x}_0 + 0, 5\lambda_s, & \hat{z}_2 &= \hat{z}_0 & (\Delta_x = 0, 5\lambda_s, \Delta_z = \lambda_s), \\ \hat{x}_3 &= \hat{x}_0 - 0, 5\lambda_s, & \hat{z}_3 &= \hat{z}_0 & (\Delta_x = 0, 5\lambda_s, \Delta_z = \lambda_s), \\ \hat{x}_0 &= 0, & \hat{z}_0 &= 5, 0\lambda_s, & \mu_{m1} = \mu_{m2} = \mu_{m3} = 1, 2. \end{aligned} \quad (27)$$

Рассматривается также несимметричная неоднородность, задаваемая параметрами

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \hat{x}_0 - 0, 25\lambda_s, & \hat{z}_1 &= \hat{z}_0 + 0, 6\lambda_s & (\Delta_x = \Delta_z = 0, 5\lambda_s), \\ \hat{x}_2 &= \hat{x}_0 + 0, 25\lambda_s, & \hat{z}_2 &= \hat{z}_0 + 0, 1\lambda_s & (\Delta_x = \Delta_z = 0, 5\lambda_s), \\ \hat{x}_3 &= \hat{x}_0 + 0, 25\lambda_s, & \hat{z}_3 &= \hat{z}_0 - 0, 5\lambda_s & (\Delta_x = \Delta_z = 0, 45\lambda_s), \\ \hat{x}_0 &= 0, & \hat{z}_0 &= 5, 0\lambda_s & \mu_{m1} = \mu_{m2} = \mu_{m3} = 1, 2. \end{aligned} \quad (28)$$

Неоднородность расположена в однородном слое ($v_s = 1, 1$ км/с), контактирующем с однородным полупространством ($v_s = 1, 2$ км/с) и с однородным слоем ($v_s = 1, 0$ км/с), ограниченным свободной поверхностью ($z = 0$). Максимальная контрастность неоднородности по скорости — 20 % ($\delta v_{p \max} = 0, 37$ км/с, $\delta v_s \max = 0, 21$ км/с). Точки наблюдения и возбуждения волнового поля (1-3 — рис. 3) расположены под свободной поверхностью ($z = 0$) на глубине ~ 3 м.

Для восстановления параметров неоднородностей (27), (28) кроме решения системы уравнений (20) применялся также подход, основанный на параметрическом задании неоднородностей в более широком классе функций, чем (26), и нахождении искомых параметров минимизацией суммы квадратов разностей левой и правой частей (19). Элементарная пробная форма

$$\delta\mu(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & r > \Delta + \Delta_1, \\ 0, 5\mu_m [1 + \cos(\pi \frac{r-\Delta_1}{\Delta})], & \Delta_1 < r < \Delta + \Delta_1, \\ \mu_m, & r < \Delta_1, \end{cases} \quad (29)$$

$$r = \sqrt{(x - \hat{x})^2 + (z - \hat{z})^2 h_x^2 + (x - \hat{x})(z - \hat{z}) h_{xz}^2}$$

определяется семью параметрами: координатами положения ее центра \hat{x} , \hat{z} ; величинами Δ и Δ_1 , задающими соответственно эллипс с постоянным значением $\delta\mu = \mu_m$ и область плавного изменения $\delta\mu$ от значения μ_m до нуля; максимальным значением модуля сдвига μ_m ; множителями h_x и h_{xz} . Восстановление параметров неоднородностей осуществляется с использованием от одной до трех элементарных функций (29), при этом для определения от 9 до 23 искомых величин (включая c_λ и c_ρ из (16)) применяется градиентный метод. Сходимость градиентного метода к значениям близким к истинным имеет место, когда отличие начальных значений от истинных не превышает 50 %, а отличие для \hat{x} , \hat{z} — 0,25–0,3 λ_s .

Прежде чем перейти к рассмотрению результатов численного моделирования, сделаем несколько замечаний. Система линейных уравнений (20) всегда решается при ненулевых значениях регуляризирующих коэффициентов α_1 и α_2 . Как показали численные эксперименты, условие гладкости восстанавливаемых параметров среды, задаваемое по вторым производным, дает лучший результат, чем аналогичное применение первых производных, а регуляризация с использованием “штрафных функций” на ненулевые значения в граничных точках области S является вполне естественной для областей с ограниченными размерами. Подобная регуляризация ($\alpha_2 \neq 0$) приводит к уменьшению ошибки определения скоростей примерно на 10–20 %. Штрафная функция на отличие от нуля значений восстанавливаемых величин

($\alpha_3 \neq 0$) используется как способ введения данных типа априорных относительно местоположения и размеров восстанавливаемой неоднородности. Введением такой штрафной функции можно уменьшить размеры области восстановления. Выбор параметра регуляризации α_1 не вызывает затруднений, поскольку в большом диапазоне его изменения (2–3 порядка) после перехода от плохой обусловленности системы (20) восстанавливаемая функция оказывается очень стабильной лишь при увеличении α_1 , с небольшой тенденцией к большей гладкости. Параметр α_2 выбирается так, чтобы значения восстанавливаемых величин на границе области S (см. рис. 3) были много меньше их максимального значения.

Число узлов в исследуемой области S равно 25×25 . Приведенные ниже примеры восстановления параметров неоднородностей получены по двум (x - и z -) компонентам волнового поля, “измеренного” в точках 1–3 (см. рис. 3), возбужденного источниками, расположенными в этих же точках (9 пар источник–приемник). Сразу отметим, что восстановление параметров неоднородностей только по z -компонентам приводит к увеличению ошибки восстановления на 10–20 %.

При восстановлении параметров волновые поля u и \tilde{u} ; из (11), (12) вычисляются конечно-разностным методом, а величины p_i^p , p_i^A , p_i^M — по формулам (13).

Перейдем к рассмотрению результатов восстановления неоднородностей (27) и (28) (изображенных соответственно на рис. 4, а и 5, а) с максимальным возмущением скорости распространения продольных волн $v_{p \max} = 0,37$ км/с при скорости распространения продольных волн в опорной среде $v_p = 1,9$ км/с. На рис. 4, б (5, б) представлены результаты восстановления (максимальное значение $v_{p \max} = 0,31$ ($v_{p \max} = 0,29$)), полученные решением системы линейных уравнений (20) с одновременным определением величин c_λ и c_ρ (из (16)) при $\alpha_3 = 0$. Величины c_λ и c_ρ отвечают минимуму суммы квадратов разностей левой и правой частей (19), который определяется градиентным методом. Эффект введения штрафных функций ($\alpha_3 \neq 0$, (20)), что можно рассматривать, например, как привлечение априорной информации относительно местоположения неоднородности и ее размеров, показан на рис. 4, в ($v_{p \max} = 0,30$). Как правило, 4–5 итераций метода Ньютона было достаточно для определения c_λ и c_ρ с точностью не хуже 1 % при выборе начальных значений ($c_{\lambda 0}$ и $c_{\rho 0}$), отличающихся от истинных, по крайней мере, на 50 %. В рассмотренных случаях ошибки определения c_λ и c_ρ не превышают соответственно 11 и 90 %, при этом величина c_ρ всегда оказывается завышенной. Столь большую ошибку восстановления $\delta\rho$ можно объяснить тем, что при принятой модельной связи параметров (17) рассеянное волновое поле, вызванное возмущением $\delta\rho$, “в среднем” вносит малый вклад в полное рассеянное поле.

Близкие величины ошибок определения c_λ и c_ρ получены и в случае параметрического задания восстанавливаемых неоднородностей с использованием формулы (29). Результаты восстановления неоднородности (27) (см. рис. 4, а) при помощи одной функции вида (29) представлены на рис. 4, г ($v_{p \max} = 0,337$ км/с), а неоднородности (28) — на рис. 5, в и 5, г соответственно для случаев трех и одной зависимостей вида (29).

Возможность определения c_λ позволяет восстанавливать величину $\gamma = v_s/v_p$. В рассматриваемом здесь случае ($\lambda = \mu$) ошибка в определении γ по данным численного моделирования не превышает 1 %. Следует отметить, что, как следует из анализа формул (23), имеется возможность определять скоростные параметры неоднородности и γ только по полю pp -волн.

С увеличением контрастности целевого объекта по отношению к опорной среде увеличиваются ошибки определения его параметров. Результаты численного моде-

лирования, в том числе и в случае двумерной SH задачи [14], показывают, что при скоростной контрастности 40–80 % ошибка восстановления скорости может достигать 40–50 %. В случаях восстановления симметричных объектов удовлетворительный результат может быть получен использованием трех (и даже двух) пар источник–приемник.

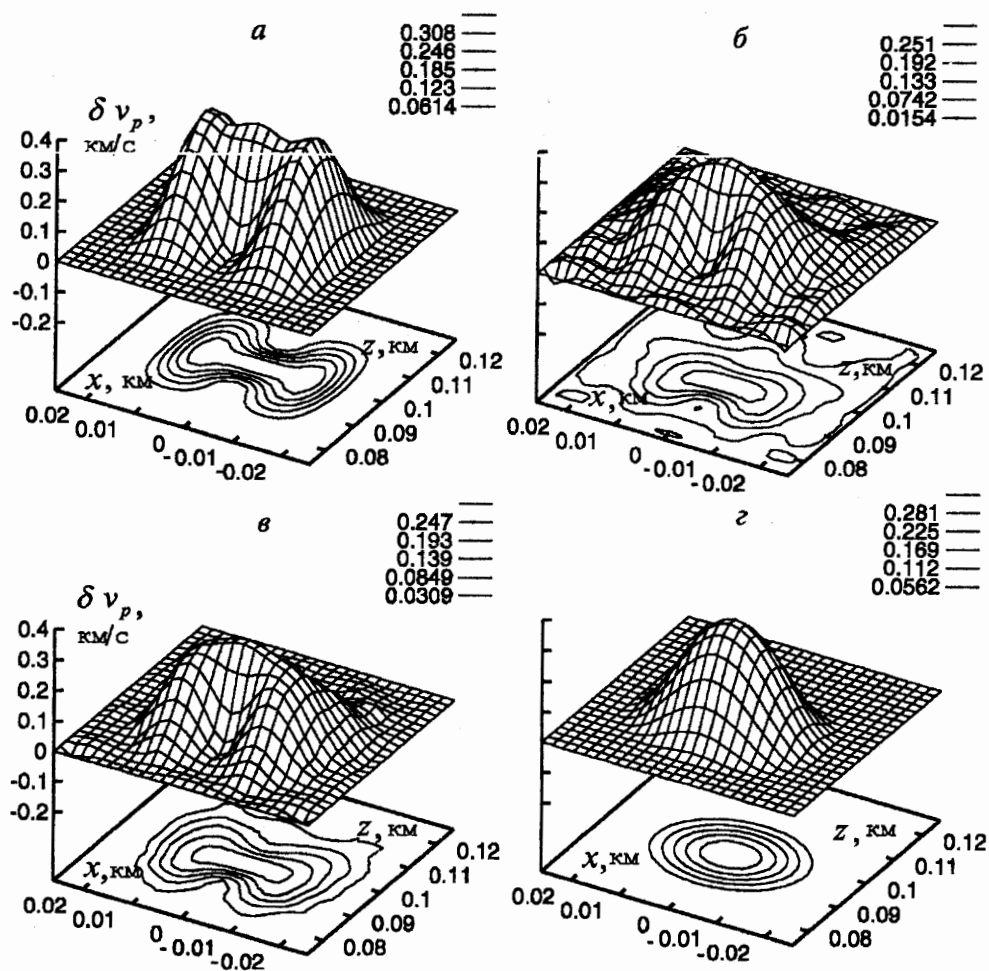


Рис. 4. Результат восстановления v_p для неоднородности (27).

a — модель; $б$ — $г$ — результат восстановления: $б$ и $в$ — решение системы уравнений (20) при $\alpha_3 = 0$ и $\alpha_3 \neq 0$ соответственно; $г$ — параметрическое задание восстанавливаемой неоднородности.

Численное моделирование восстановления локальных неоднородностей методом дифракционной томографии с использованием приближения Борна [11], выполненное для двумерных SV моделей упругих сред, показало возможность определения параметров неоднородностей не слишком высокой контрастности по отношению к опорной среде. Приведены примеры восстановления скоростных параметров неоднородностей со сложной геометрией, расположенных в слоистой среде, при возбуждении и наблюдении волнового поля на линейном профиле при небольшом числе пар

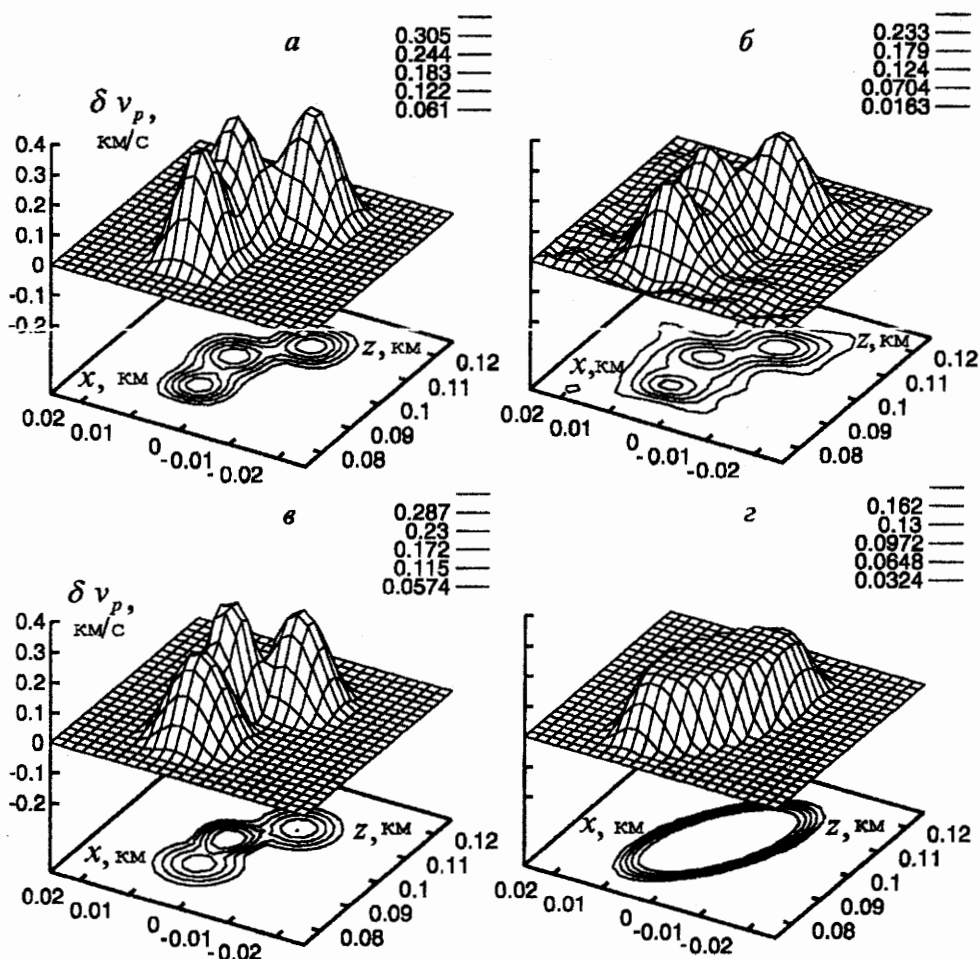


Рис. 5. Результат восстановления v_p для неоднородности (28).

а — модель; б — г — результат восстановления; б — решение системы уравнений (20) при $\alpha_3 = 0$; в и г — параметрическое задание восстанавливаемой неоднородности с использованием соответственно трех и одной функции (29).

источник-приемник. Даны численные оценки точности восстановления не только скоростных параметров, но и массовой плотности ($\delta\rho$), а также упругих параметров ($\delta\lambda$, $\delta\mu$), что позволяет оценивать величину $\gamma = v_s/v_p$.

Представление томографических функционалов в виде лучевого разложения позволяет описывать процесс рассеяния на локальной неоднородности не только в нулевом приближении лучевого метода, но и с учетом последующих членов лучевого ряда. Подобное разложение может служить основой при планировании томографических экспериментов на восстановление параметров упругих неоднородностей.

Указатель литературы

1. *Ivansson S.* Seismic borehole tomography — theory and computational methods // Proc. IEEE. 1986. Vol. 74. P. 328–338.

2. *Dines K. A., Lytle R. J.* Computerized geophysical tomography // Proc. IEEE. 1979. Vol. 67. P. 1065-1073.
3. *Devaney A. G.* Reconstructive tomography with diffracting wavefields // Inverse problems. 1986. Vol. 2. P. 161-183.
4. *Raz S.* Direct reconstruction of the velocity field and density profiles from scattering field data // Geophysics. 1981. Vol. 46. P. 832-836.
5. *Weglein A. B., Boyse W. E., Anderson J. E.* Obtaining three-dimensional velocity information directly from reflection seismic data // Ibid. P. 1116-1120.
6. *Tarantola A.* Inverse problem theory. Amsterdam, 1987.
7. *Tarantola A.* Linearized inversion of seismic reflection data // Geophys. Prosp. 1984. Vol. 32. P. 998-1015.
8. *Ryzhikov G. A., Troyan V. N.* The solution of an inverse dynamic seismic problem for three-dimensional inhomogeneous media // Rev. de Geofis. 1988. Vol. 44. P. 149-156.
9. *Ryzhikov G. A., Troyan V. N.* On regularization methods in 3-D tomography // Ninth Intern. Seminar on Model Optimization in Exploration Geophysics, Berlin 1991. Berlin, 1993. P. 53-61.
10. *Рыжиков Г. А., Троян В. Н.* Восстановление поля скорости в трехмерной среде по функционалам от полей упругих волн // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 7. С. 49-56.
11. *Рыжиков Г. А., Троян В. Н.* Томография и обратные задачи дистанционного зондирования. СПб., 1994.
12. *Keller J.B.* Accuracy and validity of the Born and Rytov approximations // J. Opt. Soc. Am. 1969. Vol. 59. P. 1003-1004.
13. *Slaney M., Kak A.C., Larsen L.E.* Limitation of imaging with first order diffraction tomography // IEEE Trans. Microwave. Teor. Tech. 1984. Vol. MTT-32. P. 860-874.
14. *Kiselev Yu. V., Troyan V. N.* Estimation of Elastic Parameters in Diffraction Tomography // Ed. V.S. Buldyrev et al. Proc. of the International Seminar "Day on Diffraction-97". St.Petersburg, 1997. P. 135-139.
15. *Wu R. S., Aki K.* Scattering characteristic of elastic waves by an elastic heterogeneity // Geophysics. 1985. Vol. 50. P. 582-595.
16. *Троян В. Н., Рыжиков Г. А.* Дифракционная томография: построение и интерпретация томографических функционалов // Зап. научн. семинаров ПОМИ. 1994. Т. 218. С. 176-196.
17. *Шерифф Р., Гелдарт Л.* Сейсморазведка. Т. 1, 2. М., 1987.
18. *Kelly K. R., Ward R. W., Treitel Sven, Alford R. M.* Synthetic seismograms: a finite difference approach // Geophysics. 1976. Vol. 41. P. 2-27.
19. *Петрашень Г. И., Кацман Б. М., Киселев Ю. В.* Количественное изучение нестационарных интерференционных волновых полей в слоисто-однородных упругих средах с плоско-параллельными границами раздела. I. Постановки задач и рациональные методы их решения // Зап. научн. семинаров ПОМИ. 1994. Т. 214. С. 7-186.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 96-05-65904) и Министерства высшего и профессионального образования РФ (проект "Трехмерная дифракционная томография и решение интерпретационных сейсмических задач").