Ал. А. Ковтун, В. И. Кучер

ЛУЧЕВОЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ОБЪЕМНЫХ ВОЛН В КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ С ПОРИСТЫМИ ФЛЮИДОНАСЫЩЕННЫМИ СЛОЯМИ

Целью настоящей статьи является обобщение теории лучевого метода вычисления полей объемных волн на случай модели кусочно-однородной изотропной упругой среды, в которой каждый из блоков в общем случае может быть либо упругопористым и флюидонасыщенным, либо чисто упругим (непористым). Описание упругопористой насыщенной среды дается в рамках теории А. Био [1] с учетом диссипации. При помощи лучевого метода строится решение для поля смещений продольных и поперечных волн в форме главного члена нестационарного лучевого разложения и примесных составляющих следующего члена разложения. Продолжение волнового поля через границы разделов осуществляется при помощи учета соответствующих условий контакта соприкасающихся (пористых либо непористых) сред. В первых трех разделах дается вывод уравнений эйконала, а также формул для амплитуд основных и примесных составляющих полей смещений продольных и поперечных волн в среде Био. В двух последних разделах приводится методика вычисления волновых полей в слоисто-однородной среде, включающая алгоритмы пересчета вспомогательных величин на границах раздела сред и вычисления амплитуд отраженных и преломленных волн.

1. Основные соотношения. Уравнения эйконала для среды Био

1. Уравнения движения упруго-пористой насыщенной флюидом среды, записываемые относительно вектора смещений $\mathbf{U}$ упругого пористого каркаса и вектора смещений $\mathbf{W}$ флюида относительно каркаса (где $\mathbf{W} = \varphi(\mathbf{U}^{(f)} - \mathbf{U})$, $\mathbf{U}^{(f)}$ — вектор смещений флюида, φ — пористость), имеют вид [1]

$$
\begin{aligned}
&(\lambda_c + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{U} + \mu\Delta\mathbf{U} + \alpha M\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{W} = \rho\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2} + \rho_f\frac{\partial^2\mathbf{W}}{\partial t^2},\\
&\alpha M\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{U} + M\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{W} = \rho_f\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2} + \rho_m\frac{\partial^2\mathbf{W}}{\partial t^2} + \frac{\eta}{k}\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial t}.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Здесь λ_c, μ, α, M суть феноменологические упругие параметры пористой насыщенной среды, введенные А. Био в [1], $\rho = \varphi\rho_f + (1-\varphi)\rho_s$ — плотность пористой породы в целом, ρ_s — плотность материала упругого каркаса, ρ_f — плотность флюида, ρ_m — эффективная плотность, определяемая геометрией порового пространства и плотностью флюида, k — проницаемость среды, η — вязкость жидкости.

В дальнейшем будем полагать, что сейсмические поля объемных волн возбуждаются некоторым сосредоточенным воздействием, приложенным в одном из блоков среды, в относительно низкой частотной области, в которой параметры η/k и ρ_m возможно считать не зависящими от частоты.

2. Решение уравнений (1.1) ищется в виде нестационарных лучевых разложе-

ний [2]

$$\mathbf{U}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{U}^{(n)}(x_k)\,f_n[t-\tau(x_k)],\quad \mathbf{W}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{W}^{(n)}(x_k)\,f_n[t-\tau(x_k)],\tag{1.2}$$

где подлежат определению векторные амплитудные функции $\mathbf{U}^{(n)}$, $\mathbf{W}^{(n)}$ и функция эйконала $\tau(x_k)$, имеющая смысл времени распространения объемной волны и определяющая ее фронт уравнением

$$\theta(x_k,t)\equiv\tau(x_k)-t=0.$$

В (1.2) $f_n(\theta)$ — разрывные (при $\theta=0$) функции, связанные друг с другом соотношениями

$$f'_n(\theta)=f_{n-1}(\theta),\quad n\geq 1.\tag{1.3}$$

Предполагая, что разложения (1.2) допускают двукратное дифференцирование, подставим их в уравнения движения (1.1). При этом учтем соотношения (1.3) и формулы

$$\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{U}^{(n)}(x_k)f''_n[t-\tau(x_k)]=\sum_{n=-2}^{\infty}\mathbf{U}^{(n+2)}(x_k)f_n[t-\tau(x_k)],$$

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial x_k}=\sum_{n=-1}^{\infty}\left(\frac{\partial\mathbf{U}^{(n)}}{\partial x_k}-\frac{\partial\tau}{\partial x_k}\mathbf{U}^{(n+1)}\right)f_n[t-\tau(x_k)],$$

а также аналогичные формулы для векторов $\mathbf{W}$. В результате перестроений в ряды по номерам функций f_n получим систему уравнений

$$\begin{gathered}\sum_{n=-2}^{\infty}\mathbf{L}^{(n)}\big(\mathbf{U}^{(k)},\mathbf{W}^{(m)}\big)f_n[t-\tau(x_k)]=0,\\ \sum_{n=-2}^{\infty}\mathbf{Q}^{(n)}\big(\mathbf{U}^{(k)},\mathbf{W}^{(m)}\big)f_n[t-\tau(x_k)]=0,\end{gathered}\tag{1.4}$$

которые должны выполняться тождественно относительно x_k и t. Требование взаимной компенсации разрывов в (1.4) приводит к бесконечной системе уравнений [2]

$$\begin{gathered}\mathrm{L}_i^{(n)}\big(\mathbf{U}^{(k)},\mathbf{W}^{(m)}\big)=0,\quad \mathrm{Q}_i^{(n)}\big(\mathbf{U}^{(k)},\mathbf{W}^{(m)}\big)=0,\\ i=1,2,3;\ n=-2,-1,0,1,\ldots,\end{gathered}\tag{1.5}$$

которая является рекуррентной относительно амплитудных функций $\mathbf{U}^{(n)}$ и $\mathbf{W}^{(n)}$ из (1.2). Соотношения (1.5) можно считать необходимым и достаточным условием того, чтобы лучевые разложения (1.2) удовлетворяли уравнениям движения (1.1). Дифференциальные операторы $\mathbf{L}^{(n)}$ и $\mathbf{Q}^{(n)}$ в (1.5) выражаются следующими формулами:

$$\mathrm{L}_i^{(n)}=(\lambda_c+\mu)\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\big[\operatorname{div}\mathbf{U}^{(n)}-(\mathbf{p},\mathbf{U}^{(n+1)})\big]-p_i\big[\operatorname{div}\mathbf{U}^{(n+1)}-(\mathbf{p},\mathbf{U}^{(n+2)})\big]\right\}+$$
$$+\alpha M\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\big[\operatorname{div}\mathbf{W}^{(n)}-(\mathbf{p},\mathbf{W}^{(n+1)})\big]-p_i\big[\operatorname{div}\mathbf{W}^{(n+1)}-(\mathbf{p},\mathbf{W}^{(n+2)})\big]\right\}+$$

$$\mu\left[\Delta U_i^{(n)} - U_i^{(n+1)}\Delta\tau - 2(\mathbf{p}, \operatorname{grad} U_i^{(n+1)}) + p^2 U_i^{(n+2)}\right] - \rho U_i^{(n+2)} - \rho_f W_i^{(n+2)},$$

$$\mathrm{Q}_i^{(n)} = \alpha M\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\operatorname{div}\mathbf{U}^{(n)} - (\mathbf{p}, \mathbf{U}^{(n+1)})\right] - p_i\left[\operatorname{div}\mathbf{U}^{(n+1)} - (\mathbf{p}, \mathbf{U}^{(n+2)})\right]\right\} +$$
$$M\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\operatorname{div}\mathbf{W}^{(n)} - (\mathbf{p}, \mathbf{W}^{(n+1)})\right] - p_i\left[\operatorname{div}\mathbf{W}^{(n+1)} - (\mathbf{p}, \mathbf{W}^{(n+2)})\right]\right\} -$$
$$\rho_f U_i^{(n+2)} - \rho_m W_i^{(n+2)} - \frac{\eta}{k} W_i^{(n+1)}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.6}$$

где вектор рефракции $\mathbf{p}$ есть

$$\mathbf{p} = \operatorname{grad}\tau = \frac{\mathbf{n}}{v},$$

$\mathbf{n}$ — орт нормали к фронту волны, распространяющейся с фазовой скоростью v. В формулах (1.6) при $n = -2, -1$ выполняются равенства

$$\mathbf{U}^{(-2)} = \mathbf{U}^{(-1)} = \mathbf{W}^{(-2)} = \mathbf{W}^{(-1)} = 0, \tag{1.7}$$

вытекающие из условия компенсации разрывов в (1.4) [2].

3. Методика построение искомых асимптотических решений в главном приближении лучевого метода полей объемных волн разной поляризации основывается на анализе систем уравнений, получаемых из (1.5) при $n = -2$ и $n = -1$. Из этих систем далее выводятся уравнения эйконала и переноса, позволяющие найти фазовые скорости продольных и поперечной волн, а также их амплитуды.

При $n = -2$ из (1.5) — (1.7) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}&(\lambda_c + \mu)p_i(\mathbf{p}, \mathbf{U}^{(0)}) + \alpha M(\mathbf{p}, \mathbf{W}^{(0)}) + (\mu p^2 - \rho)U_i^{(0)} - \rho_f W_i^{(0)} = 0,\\ &\alpha M p_i(\mathbf{p}, \mathbf{U}^{(0)}) + M p_i(\mathbf{p}, \mathbf{W}^{(0)}) - \rho_f U_i^{(0)} - \rho_m W_i^{(0)} = 0, \quad i = 1, 2, 3,\end{aligned} \tag{1.8}$$

относительно векторов $\mathbf{U}^{(0)}$ и $\mathbf{W}^{(0)}$. Проблема вычисления $\mathbf{U}^{(0)}$ и $\mathbf{W}^{(0)}$ по существу сводится к задаче нахождения собственных векторов и собственных чисел матрицы 6×6 системы (1.8). Совместное уравнение эйконала для продольных и поперечной волн вытекает из условия разрешимости однородной системы (1.8), которое при учете формулы $p^2 = 1/v^2$ можно разрешить относительно величины v^2 [3]. Согласно [3], ранг матрицы системы (1.8) равен четырем, что свидетельствует о наличии зависимости между компонентами векторов $\mathbf{W}^{(0)}$ и $\mathbf{U}^{(0)}$. Поэтому из шести собственных чисел только четыре имеют ненулевые значения, из которых два кратных относятся к поперечной волне, а два других — к двум типам продольных волн [1, 3].

Для упрощения вычислений целесообразно воспользоваться методикой, предложенной в [2], которая позволяет расщепить систему (1.8) на уравнения, соответствующие волнам разной поляризации. Суть ее состоит во введении в точках некоторого фиксированного луча, вдоль которого рассматривается распространение волны с определенным типом поляризации, трех взаимно-ортогональных ортов (так называемого естественного базиса лучевой системы координат) $\mathbf{e}_k \equiv \mathbf{e}_k(\tau)$ $(k = 1, 2, 3)$, таких, что

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = \mathbf{n}, \quad [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_3, \quad \left(\mathbf{e}_k, \frac{d\mathbf{e}_r}{d\tau}\right) = 0, \ k, r = 2, 3.$$

В случае однородной среды орты $\mathbf{e}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ будут сохраняться постоянными в точках луча. Причем орт $\mathbf{e}_1$ перпендикулярен фронту волны и совпадает с касательной к лучу, а векторы $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ лежат в плоскости, касательной к фронту.

В лучевом базисе вектора $\mathbf{U}^{(n)}$ и $\mathbf{W}^{(n)}$ при $n = 0, 1, \ldots$ представляются в виде

$$\mathbf{U}^{(n)} = \sum_k u_k^{(n)} \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{W}^{(n)} = \sum_k w_k^{(n)} \mathbf{e}_k. \tag{1.9}$$

4. В случае поперечной волны полагаем, что поля $\mathbf{U}^{(0)}$ и $\mathbf{W}^{(0)}$ имеют отличные от нуля составляющие только в касательной к фронту плоскости. Тогда поочередное проектирование (1.8) на орты $\mathbf{e}_k$ $(k = 2, 3)$ дает одинаковые системы

$$(\mu p^2 - \rho) u_k^{(0)} - \rho_f w_k^{(0)} = 0, \quad -\rho_f u_k^{(0)} - \rho_m w_k^{(0)} = 0, \quad k = 2, 3, \tag{1.10}$$

условие разрешимости которых

$$(\mu p^2 - \rho) u_k^{(0)} + \frac{\rho_f^2}{\rho_m} u_k^{(0)} = 0.$$

Считая $u_k^{(0)}$ отличными от нуля, получим равенство

$$p^2 = \sum_i \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{1}{v_s^2}, \quad v_s^2 = \frac{\mu}{\rho - \rho_f^2 / \rho_m}, \tag{1.11}$$

которое следует рассматривать как уравнение эйконала, отвечающее распространению поперечной (S) волны с фазовой скоростью v_s.

5. Перейдем к случаю продольных волн. Полагаем, что поля $\mathbf{U}^{(0)}$ и $\mathbf{W}^{(0)}$ имеют отличные от нуля составляющие только в направлении орта $\mathbf{e}_1$. Проектирование (1.8) на орт $\mathbf{e}_1$ приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} (Hp^2 - \rho) u_1^{(0)} + (\alpha M p^2 - \rho_f) w_1^{(0)} &= 0, \\ (\alpha M p^2 - \rho_f) u_1^{(0)} + (M p^2 - \rho_m) w_1^{(0)} &= 0, \end{aligned} \tag{1.12}$$

где обозначено $H = \lambda + 2\mu$. Система (1.12) имеет нетривиальное решение в случае

$$(Hp^2 - \rho)(Mp^2 - \rho_m) - (\alpha M p^2 - \rho_f)^2 = 0, \tag{1.13}$$

откуда следует

$$p^4 (HM - \alpha^2 M^2) - p^2 (H\rho_m - 2\alpha M \rho_f + M\rho) + (\rho\rho_m - \rho_f^2) = 0. \tag{1.14}$$

Из (1.14) получаем

$$p^2 = \sum_i \left(\frac{\partial \tau}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{1}{v_{p_i}^2}, \quad i = 1, 2, \tag{1.15}$$

$$v_{p_i}^2 = \frac{H\rho_m + M\rho - 2\alpha M \rho_f \pm \sqrt{(H\rho_m + M\rho - 2\alpha M \rho_f)^2 - 4(HM - \alpha^2 M^2)(\rho\rho_m - \rho_f^2)}}{2(\rho\rho_m - \rho_f^2)}.$$

Последнее есть уравнение эйконала, отвечающее распространению в среде Био быстрой и медленной продольных $(P1,\ P2)$ волн с фазовыми скоростями v_{p_1} и v_{p_2}.

Заметим, что положительность значений v^2 в (1.15) и (1.11) вытекает из условий положительности квадратичных форм для потенциальной и кинетической энергий из [1].

6. Переход от пористой к чисто упругой среде происходит при устремлении коэффициента пористости φ к нулю. Действительно, используя в (1.11) и (1.15) явную зависимость от φ посредством формулы [1] $\rho_m = \rho_f T/\varphi$, где T — эффективный параметр, характеризующий извилистость пор, получим

$$v_s^2 = \mu/(\rho - \frac{\rho_f}{T}\varphi),$$

$$v_{p_i}^2 = \frac{H + \frac{\rho M}{T\rho_f}\varphi - \frac{2\alpha M}{T}\varphi \pm \sqrt{(H + \frac{\rho M}{T\rho_f}\varphi - \frac{2\alpha M}{T}\varphi)^2 - 4(HM - \alpha^2 M^2)(\rho - \frac{\rho_f}{T}\varphi)\frac{M\varphi}{\rho_f T}}}{2(\rho - \frac{\rho_f}{T}\varphi)}. \tag{1.16}$$

Легко убедиться, что при $\varphi \to 0$ выражения (1.16) превращаются в извесные формулы для скоростей поперечной и продольной волн в чисто упругой среде, а скорость второй продольной волны обращается в ноль.

7. Для однородной изотропной среды система дифференциальных уравнений для P_i и S волн записывается в виде [2]:

$$\frac{\partial x_k}{\partial \tau} = v^2 p_k, \quad \frac{\partial p_k}{\partial \tau} = 0, \quad k = 1, 2, 3. \tag{1.17}$$

Начальные условия системы (1.17) в случае продолжения поля от точечного источника в момент времени $\tau = 0$

$$x_k|_{\tau=0} = x_k^0, \quad p_k|_{\tau=0} = p_k^0(\gamma_2, \gamma_3) = \frac{n_k^0(\gamma_2, \gamma_3)}{v}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{1.18}$$

Здесь $\mathbf{x}^0 = (x_k^0)$ — координаты точки источника, $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{n}^0$ — начальные значения соответственно вектора рефракции и волновой нормали в точке источника, задаваемые в лучевой системе координат $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ $(\gamma_1 \equiv \tau)$. В случае продолжения поля от фиксированной волновой поверхности в момент времени $\tau = \tau^0$ начальными данными являются

$$x_k|_{\tau=\tau^0} = x_k^0(\gamma_2, \gamma_3), \quad p_k|_{\tau=\tau^0} = p_k^0(\gamma_2, \gamma_3), \quad \nu = 1, 2, \ldots; \ k = 1, 2, 3, \tag{1.19}$$

координаты x_k^0 точек начального фронта волны заданного типа (P_1, P_2, S) и значения векторов $\mathbf{p}^0$ рефракции в этих точках.

2. Амплитуды волн главного приближения

1. Неизвестные амплитуды $u_k^{(0)}$, $w_k^{(0)}$ $(k = 1, 2, 3)$ полей продольных и поперечных волн в главном приближении лучевого метода находятся посредством совместного решения в точках луча уравнений эйконала и переноса. Для вывода уравнений переноса обратимся к системе (1.5), которая при $n = -1$ принимает вид

$$\begin{aligned}
&(\lambda_c + \mu)[\operatorname{grad}(\mathbf{p}, \mathbf{U}^{(0)}) + \mathbf{p}\operatorname{div}\mathbf{U}^{(0)} - \mathbf{p}(\mathbf{p}, \mathbf{U}^{(1)})] + \\
&+\alpha M[\operatorname{grad}(\mathbf{p}, \mathbf{W}^{(0)}) + \mathbf{p}\operatorname{div}\mathbf{W}^{(0)} - (\mathbf{p}, \mathbf{W}^{(1)})] + \\
&+\mu(\mathbf{U}^{(0)}\Delta\tau + \frac{2}{v^2}\frac{d\mathbf{U}^{(0)}}{d\tau} - p^2\mathbf{U}^{(1)}) - \rho\mathbf{U}^{(1)} - \rho_f\mathbf{W}^{(1)} = 0, \\
&\alpha M[\operatorname{grad}(\mathbf{p}, \mathbf{U}^{(0)}) + \mathbf{p}\operatorname{div}\mathbf{U}^{(0)} - \mathbf{p}(\mathbf{p}, \mathbf{U}^{(1)})] + \\
&+M[\operatorname{grad}(\mathbf{p}, \mathbf{W}^{(0)}) + \mathbf{p}\operatorname{div}\mathbf{W}^{(0)} - \mathbf{p}\,(\mathbf{p}, \mathbf{W}^{(1)})] + \\
&+\rho_f\mathbf{U}^{(1)} + \rho_m\mathbf{W}^{(1)} + \frac{\eta}{k}\mathbf{W}^{(0)} = 0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь было использовано очевидное равенство

$$(\mathbf{e}_1, \operatorname{grad}) = \frac{d}{d\,s} = \frac{1}{v}\frac{d}{d\tau}, \tag{2.2}$$

где ds — элемент длины отрезка луча, либо P_i-, либо S-волны.

2. Применяя методику из п. 1.1, в случае поля S-волны векторные функции $\mathbf{U}^{(0)}$ и $\mathbf{W}^{(0)}$ будем представлять так:

$$\mathbf{U}^{(0)} \equiv \mathbf{U}_s^{(0)} = \sum_{k=2,3} u_{ks}^{(0)}\mathbf{e}_k, \quad \mathbf{W}^{(0)} \equiv \mathbf{W}_s^{(0)} = \sum_{k=2,3} w_{ks}^{(0)}\mathbf{e}_k, \quad u_{1s}^{(0)} = w_{1s}^{(0)} = 0.$$

Тогда уравнения (2.1) принимают вид

$$\begin{aligned}
&(\lambda_c+\mu)\mathbf{p}\left[\operatorname{div}\mathbf{U}_s^{(0)} - (\mathbf{p},\mathbf{U}_s^{(1)})\right] + \alpha M\mathbf{p}\left[\operatorname{div}\mathbf{W}_s^{(0)} - (\mathbf{p},\mathbf{W}_s^{(1)})\right] + \\
&+\mu\Big(\mathbf{U}_s^{(0)}\Delta\tau + \frac{2}{v_s^2}\frac{d\mathbf{U}_s^{(0)}}{d\tau} - p^2\mathbf{U}_s^{(1)}\Big) + \rho\mathbf{U}_s^{(1)} + \rho_f\mathbf{W}_s^{(1)} = 0, \\
&\alpha M\mathbf{p}\left[\operatorname{div}\mathbf{U}_s^{(0)} - (\mathbf{p},\mathbf{U}_s^{(1)})\right] + M\mathbf{p}\left[\operatorname{div}\mathbf{W}_s^{(0)} - (\mathbf{p},\mathbf{W}_s^{(1)})\right] + \\
&+\rho_f\mathbf{U}_s^{(1)} + \rho_m\mathbf{W}_s^{(1)} + \frac{\eta}{k}\mathbf{W}_s^{(0)} = 0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Проецируя систему (2.3) на орты $\mathbf{e}_k$ $(k = 2,3)$ и учитывая (1.11), получаем

$$\begin{aligned}
&\mu\Delta\tau u_{ks}^{(0)} + 2\mu\frac{d\,u_{ks}^{(0)}}{d\tau} + \frac{\rho_f}{\rho_m}(\rho_f u_{ks}^{(1)} + \rho_m w_{ks}^{(1)}) = 0, \\
&\rho_f u_{ks}^{(1)} + \rho_m w_{ks}^{(1)} + \frac{\eta}{k}w_{ks}^{(0)} = 0, \quad k = 2,3.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Условие разрешимости неоднородной системы (2.4) есть

$$\mu\Delta\tau u_{ks}^{(0)} + \frac{2\mu}{v_s^2}\frac{d\,u_{ks}^{(0)}}{d\tau} - \frac{\rho_f}{\rho_m}\frac{\eta}{k}w_{ks}^{(0)} = 0. \tag{2.5}$$

Принимая во внимание известное тождество [2]

$$\Delta\tau = \frac{1}{vL^2}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{L^2}{v}\right), \tag{2.6}$$

где L — геометрическое расхождение лучей, и учитывая (1.9), придем к уравнению

$$\frac{1}{L^2}\frac{d\,L_s}{d\tau} + \frac{1}{u_{ks}^{(0)}}\frac{d\,u_{ks}^{(0)}}{d\tau} + \frac{v_s^2}{2\mu}\frac{\rho_f^2}{\rho_m^2}\frac{\eta}{k} = 0, \quad k = 2,3. \tag{2.7}$$

Интегрирование (2.7) приводит к следующим выражениям для амплитуд $u_{ks}^{(0)}$ и $w_{ks}^{(0)}$:

$$u_{ks}^{(0)} = \frac{\Psi_s^{(0)}(\gamma_2,\gamma_3)}{\sqrt{v_s}L}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{v_s^2}{\mu}\frac{\rho_f^2}{\rho_m^2}\frac{\eta}{k}(\tau-\tau_0)\right], \quad w_{ks}^{(0)} = -\frac{\rho_f}{\rho_m}u_{ks}^{(0)}, \quad k = 2,3. \tag{2.8}$$

3. В случае продольных волн функции $\mathbf{U}^{(0)}$ и $\mathbf{W}^{(0)}$ будем представлять в виде

$$\mathbf{U}^{(0)} \equiv \mathbf{U}_1^{(0)} = u_{1p_i}^{(0)}\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{W}^{(0)} \equiv \mathbf{W}_1^{(0)} = w_{1p_i}^{(0)}\mathbf{e}_1, \quad u_{kp_i}^{(0)} = w_{kp_i}^{(0)} = 0, \ k = 2,3.$$

Подстановка этих выражений в уравнения (2.1) и проецироване их на направление орта $\mathbf{e}_1$ дает

$$\begin{gathered}
\frac{\lambda_c+\mu}{v_{p_i}}\left[\frac{d}{d\tau}\left(\frac{u^{(0)}_{1p_i}}{v_{p_i}}\right)+v_{p_i}\,\mathrm{div}\,(u^{(0)}_{1p_i}\mathbf{p})\right]+\frac{\alpha M}{v_{p_i}}\left[\frac{d}{d\tau}\left(\frac{w^{(0)}_{1p_i}}{v_{p_i}}\right)+v_{p_i}\,\mathrm{div}\,(w^{(0)}_{1p_i}\mathbf{p})\right]+\\
+\mu u^{(0)}_{1p_i}\Delta\tau+\frac{2\mu}{v^2_{p_i}}\frac{du^{(0)}_{1p_i}}{d\tau}-\left[\left(\frac{H}{v^2_{p_i}}-\rho\right)(\mathbf{e}_1,\mathbf{U}^{(1)})+\left(\frac{\alpha M}{v^2_{p_i}}-\rho_f\right)(\mathbf{e}_1,\mathbf{W}^{(1)})\right]=0,\\
\frac{\alpha M}{v_{p_i}}\left[\frac{d}{d\tau}\left(\frac{u^{(0)}_{1p_i}}{v_{p_i}}\right)+v_{p_i}\,\mathrm{div}\,(u^{(0)}_{1p_i}\mathbf{p})\right]+\frac{M}{v_{p_i}}\left[\frac{d}{d\tau}\left(\frac{w^{(0)}_{1p_i}}{v_{p_i}}\right)+v_{p_i}\,\mathrm{div}\,(w^{(0)}_{1p_i}\mathbf{p})\right]-\\
-\left[\left(\frac{\alpha M}{v^2_{p_i}}-\rho_f\right)(\mathbf{e}_1,\mathbf{U}^{(1)}_p)+(\frac{M}{v^2_{p_i}}-\rho_m)(\mathbf{e}_1,\mathbf{W}^{(1)}_p)\right]+\frac{\eta}{k}w^{(1)}_{1p_i}=0.
\end{gathered}\tag{2.9}$$

Условие разрешимости системы (2.9) можно записать как

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\lambda_c+\mu}{v_{p_i}}-\frac{\alpha M-\rho_f v^2_{p_i}}{M-\rho_m v^2_{p_i}}\frac{\alpha M}{v_{p_i}}\right)\left[\frac{d}{d\tau}\left(\frac{u^{(0)}_{1p_i}}{v_{p_i}}\right)+v_{p_i}\,\mathrm{div}\,(u^{(0)}_{1p_i}\mathbf{p})\right]+\\
+\left(\frac{\alpha M}{v^2_{p_i}}-\frac{\alpha M-\rho_f v^2_{p_i}}{M-\rho_m v^2_{p_i}}\frac{M}{v_{p_i}}\right)\left[\frac{d}{d\tau}\left(\frac{w^{(0)}_{1p_i}}{v_{p_i}}\right)+v_{p_i}\,\mathrm{div}\,(w^{(0)}_{1p_i}\mathbf{p})\right]+\\
+\mu u^{(0)}_{1p_i}\Delta\tau+\frac{2\mu}{v^2_{p_i}}\frac{du^{(0)}_{1p_i}}{d\tau}-\frac{\alpha M-\rho_f v^2_{p_i}}{M-\rho_m v^2_{p_i}}\frac{\eta}{k}w^{(0)}_{1p_i}=0,
\end{gathered}\tag{2.10}$$

откуда, принимая во внимание (1.12), (1.13), (2.6) и равенство

$$v_{p_i}\,\mathrm{div}\,(u^{(0)}_{1p_i}\mathbf{p})=\frac{1}{v_{p_i}}\frac{du^{(0)}_{1p_i}}{d\tau}+v_{p_i}u^{(0)}_{1p_i}\Delta\tau,\tag{2.11}$$

придем к уравнению

$$\begin{gathered}
\frac{H(M-\rho_m v^2_{p_i})-2\alpha M(\alpha M-\rho_f v^2_{p_i})+M(H-\rho v^2_{p_i})}{M-\rho_m v^2_{p_i}}\left(\frac{2}{v^2_{p_i}}\frac{du^{(0)}_{1p_i}}{d\tau}+\frac{2}{v^2_{p_i}}\frac{u^{(0)}_{1p_i}}{L}\frac{dL}{d\tau}\right)+\\
+\frac{\eta}{k}\frac{H-\rho v^2_{p_i}}{M-\rho_m v^2_{p_i}}u^{(0)}_{1p_i}=0.
\end{gathered}\tag{2.12}$$

Интегрирование (2.12) приводит к следующему результату для амплитуд $u^{(0)}_{1p_i}$, $w^{(0)}_{1p_i}$:

$$\begin{gathered}
u^{(0)}_{1p_i}=\frac{\Psi^{(0)}_p(\gamma_2,\gamma_3)}{\sqrt{v_{p_i}}L_p}\exp\left[-\frac{1}{2}\sigma(\tau-\tau_0)\right],\\
w^{(0)}_{1p_i}=-\frac{H-\rho v^2_{p_i}}{\alpha M-\rho_f v^2_{p_i}}u^{(0)}_{1p_i}=-\frac{\alpha M-\rho_f v^2_{p_i}}{M-\rho_m v^2_{p_i}}u^{(0)}_{1p_i},
\end{gathered}\tag{2.13}$$

где

$$\sigma=\frac{v^2_{p_i}(H-\rho v^2_{p_i})}{2M(H-\alpha M)-v^2_{p_i}(H\rho_m-2\alpha M\rho_f+\alpha M)}\frac{\eta}{k}.$$

В (2.8) функция $\Psi^{(0)}_s(\gamma_2,\gamma_3)$, а в (2.13) функция $\Psi^{(0)}_p(\gamma_2,\gamma_3)$ определяются начальными данными для поля волны (в форме главного приближения), заданными в исходной точке луча в момент времени τ_o. Основное отличие формул (2.8) и (2.13) от аналогичных для чисто упругой среды состоит в наличии экспоненциального множителя, учитывающего диссипацию среды.

3. Вычисление амплитуды примесных составляющих

1. Под примесными составляющими соответственно либо P-, либо S-волн будем понимать такие составляющие амплитудных векторов $\mathbf{U}^{(1)}$, $\mathbf{W}^{(1)}$ первого приближения в базисе ортов $\{\mathbf{e}_k\}$, которые оказываются ортогональными векторам $\mathbf{U}^{(0)}$, $\mathbf{W}^{(0)}$ нулевого приближения соответствующего типа волны. Очевидно, что в случае поля S-волны речь идет о составляющих $u_{s1}^{(1)}\mathbf{e}_1$ и $w_{s1}^{(1)}\mathbf{e}_1$ векторов $\mathbf{U}^{(1)}$, $\mathbf{W}^{(1)}$. Амплитуды $u_{s1}^{(1)}$, $w_{s1}^{(1)}$ находятся на основе уравнений (2.3), в которых амплитудные векторы $\mathbf{U}_s^{(o)}$, $\mathbf{W}_s^{(o)}$ считаются уже известными. Проецируя (2.3) на орт $\mathbf{e}_1$ и учитывая равенства

$$\left(\frac{d\mathbf{U}_s^{(0)}}{d\tau}, \mathbf{e}_1\right) = -\left(\mathbf{U}_s^{(0)}, \frac{d\mathbf{e}_1}{d\tau}\right) = 0, \quad k = 2,3, \tag{3.1}$$

а также формулу (1.11), после преобразований получаем

$$\begin{aligned} u_{s1}^{(1)}\left(\frac{\lambda_c+\mu}{v_s^2} - \frac{\rho_f^2}{\rho_m}\right) + w_{s1}^{(1)}\left(\frac{\alpha M}{v_s^2} - \rho_f\right) &= \frac{1}{v_s}[(\lambda_c+\mu)\operatorname{div}\mathbf{U}_s^{(0)} + \alpha M \operatorname{div}\mathbf{W}_s^{(0)}], \\ u_{s1}^{(1)}\left(\frac{\alpha M}{v_s^2} - \rho_f\right) + w_{s1}^{(1)}\left(\frac{M}{v_s^2} - \rho_m\right) &= \frac{1}{v_s}\left(\alpha M \operatorname{div}\mathbf{U}_s^{(0)} + M\operatorname{div}\mathbf{W}_s^{(0)}\right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Из (3.2) находим

$$u_{s1}^{(1)} = \frac{\Delta_u^{(s)}}{\Delta^{(s)}}, \quad w_{s1}^{(1)} = \frac{\Delta_w^{(s)}}{\Delta^{(s)}}, \tag{3.3}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \Delta^{(s)} &= \left(\frac{\lambda_c+\mu}{v_s^2} - \frac{\rho_f^2}{\rho_m}\right)\left(\frac{M}{v_s^2} - \rho_m\right) - \left(\frac{\alpha M}{v_s^2} - \rho_f\right)^2, \\ \Delta_u^{(s)} &= \frac{\operatorname{div}\mathbf{U}_s^{(0)}}{v_s}\left[\left(\lambda_c+\mu - \alpha M\frac{\rho_f^2}{\rho_m}\right)\left(\frac{M}{v_s^2} - \rho_m\right) - \left(\alpha M - M\frac{\rho_f}{\rho_m}\right)\left(\frac{\alpha M}{v_s^2} - \rho_f\right)\right], \\ \Delta_w^{(s)} &= \frac{\operatorname{div}\mathbf{W}_s^{(0)}}{v_s}\left[\left(\frac{\lambda_c+\mu}{v_s^2} - \frac{\rho_f^2}{\rho_m}\right)\left(\alpha M - M\frac{\rho_f}{\rho_m}\right) - \left(\lambda_c+\mu - \alpha M\frac{\rho_f}{\rho_m}\right)\left(\frac{\alpha M}{v_s^2} - \rho_f\right)\right]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

2. В случае P-волн для определения амплитуд $u_{pk}^{(1)}$, $w_{pk}^{(1)}$ $(k = 2,3)$ примесных составляющих спроецируем равенста (2.1) на орты $\mathbf{e}_k (k = 2,3)$. Учитывая при этом формулы

$$(\mathbf{e}_k, \frac{d}{d\tau}u_{1p_i}\mathbf{e}_1) = -(\frac{d}{d\tau}\mathbf{e}_k, u_{1p_i}\mathbf{e}_1), \quad k = 2,3, \tag{3.5}$$

получаем уравнения

$$\begin{aligned} u_{pk}^{(1)}\left(\frac{\mu}{v_{p_i}^2} - \rho\right) - \rho_f w_{pk}^{(1)} &= \frac{1}{v_{p_i}}[(\lambda_c+\mu)(\mathbf{e}_k, \operatorname{grad} u_{1p_i}^{(0)}) + \alpha M(\mathbf{e}_k, \operatorname{grad} w_{1p_i}^{(0)})], \\ \rho_f u_{pk}^{(1)} + \rho_m w_{pk}^{(1)} &= -\frac{M}{v_{p_i}}[\alpha(\mathbf{e}_k, \operatorname{grad} u_{1p_i}^{(0)}) + (\mathbf{e}_k, \operatorname{grad} w_{1p_i}^{(0)})], \end{aligned} \tag{3.6}$$

откуда находим

$$u^{(1)}_{kp_i} = \frac{\Delta^{(p_i)}_{uk}}{\Delta^{(p_i)}}, \quad w^{(1)}_{kp_i} = \frac{\Delta^{(p_i)}_{wk}}{\Delta^{(p_i)}}, \tag{3.7}$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned}
&\Delta^{(p_i)} = \rho_m\left(\frac{\mu}{v^2_{p_i}} - \rho\right) + \rho_f^2,\\
&\Delta^{(p_i)}_{uk} = \frac{(\mathbf{e}_k, \operatorname{grad} u^{(0)}_{1p_i})}{v_{p_i}}\left[\rho_m(\lambda_c + \mu - \alpha MG) - \rho_f M(\alpha - G)\right],\\
&\Delta^{(p_i)}_{wk} = \frac{(\mathbf{e}_k, \operatorname{grad} w^{(0)}_{1p_i})}{v_{p_i}}\left[\left(\rho - \frac{\mu}{v^2_{p_i}}\right)M(\alpha - G) - \rho_f(\lambda_c + \mu - \alpha MG)\right],\\
&G = \frac{H - \rho v^2_{p_i}}{\alpha M - \rho_f v^2_{p_i}}, \quad k = 2, 3;\ i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

3. Из формул (3.3)–(3.8) следует, что для вычисления примесных составляющих полей P- и S-волн необходимо вычислить в точках луча значения величин вида

$$(\mathbf{e}_k, \operatorname{grad} u_{1p_i}), \quad (\mathbf{e}_k, \operatorname{grad} u_{ks}), \quad k = 2, 3, \tag{3.9}$$

а также (в случае S-волны)

$$\operatorname{div} \mathbf{e}_k, \quad k = 2, 3. \tag{3.10}$$

Величины (3.9) при учете (2.8), (2.13) выражаются через

$$(\mathbf{e}_k, \operatorname{grad} L), \quad (\mathbf{e}_k, \operatorname{grad} \Psi^{(0)}), \quad k = 2, 3, \tag{3.11}$$

и представляются (например, в случае S-волны) формулами вида

$$(\mathbf{e}_k, \operatorname{grad} u_{ks}) = \exp\left[-\frac{v_s^2\rho_f^2\eta(\tau - \tau_o)}{2\mu\rho_m^2 k}\right]\left[\frac{(\mathbf{e}_k, \operatorname{grad} \Psi^{(0)}_s)}{\sqrt{v_s}L_s} - \frac{\Psi^{(0)}_s(\mathbf{e}_k, \operatorname{grad} L_s)}{\sqrt{v_s}L_s^2}\right], \quad k = 2, 3. \tag{3.12}$$

Значения величин $\Psi^{(0)}_s$, $(\mathbf{e}_k, \operatorname{grad} \Psi^{(0)}_s)$ определяются в результате учета начальных данных из (1.18) или (1.19), а также условий на границах раздела сред, встречаемых лучом, которые будут обсуждаться ниже. Что же касается геометрического расхождения лучей, его градиента и величин (3.10), то они вычисляются при помощи формул [4, 5]

$$\begin{gathered}
L = |Q_{22}Q_{33} - Q_{23}Q_{32}|^{1/2},\\
(\mathbf{e}_2, \operatorname{grad} L) = (R_2Q_{33} - R_3Q_{32})/L, \quad (\mathbf{e}_3, \operatorname{grad} L) = (R_3Q_{22} - R_2Q_{23})/L,\\
\operatorname{div} \mathbf{e}_2 = -(C_2Q_{23} + C_3Q_{22})/\Lambda, \quad \operatorname{div} \mathbf{e}_3 = -(C_2Q_{33} + C_3Q_{32})/\Lambda,
\end{gathered} \tag{3.13}$$

в которых использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&Q_{ij} = \left(\mathbf{e}_i, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_j}\right), \quad Q_{i,jk} = \left(\mathbf{e}_i, \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \gamma_j \partial \gamma_k}\right),\\
&C_2 = \left(\mathbf{e}_3, \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \gamma_2}\right), \quad C_3 = \left(\mathbf{e}_2, \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \gamma_3}\right),\\
&R_2 = Q_{2,22}Q_{33} - Q_{3,22}Q_{23} + Q_{3,32}Q_{22} - Q_{2,32}Q_{32},\\
&R_3 = Q_{3,33}Q_{22} - Q_{2,33}Q_{32} + Q_{2,23}Q_{33} - Q_{3,23}Q_{23},\\
&\Lambda = Q_{22}Q_{33} - Q_{23}Q_{32}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

4. Вычисление лучей и вспомогательных величин

В лучевом методе, как известно, для вычисления полей смещений P_i- или S-волн сначала строится система лучей, идущих от исходных точек начального фронта (или точки источника) до точки наблюдения, а затем в точках каждого из лучей определяются составляющие векторов смещений в соответствующем приближении. При этом процесс вычислений разбивается на последовательности однотипных циклов. В каждом из таких циклов сначала поле продолжается вдоль луча внутри блока среды до точки пересечения луча с границей раздела. Затем, путем решения задачи на отражение–преломление, определяется поле в точке, прилегающей к соответствующей стороне границы. Эта точка принимается за начальную для следующего отрезка луча отраженной либо преломленной волны заданного типа. Таким образом, достаточно рассмотреть лишь один цикл последовательности вычислений.

Алгоритмы построения лучей и продолжения вдоль них вспомогательных величин из (3.14) для случая слоистой чисто упругой (непористой) среды изложены в [4–6] и, как оказывается, применимы для сред, содержащих пористые насыщенные слои. Поэтому здесь мы ограничимся лишь кратким описанием методики вычислений, основанной на результатах из [6].

1. В точках $\mathbf{x}^0$ начального волнового фронта считаются известными компоненты $p_k^0 = p_k^0(\gamma_2, \gamma_3)$ $(k = 1, 2, 3)$ вектора рефракции, которые остаются постоянными на отрезке луча до его пересечения с границей раздела. Радиус-вектор $\mathbf{x}$ отрезка луча определяется формулой

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + v^2 \mathbf{p}^0 (\tau - \tau_0), \quad \tau > \tau_0. \tag{4.1}$$

В точках $\mathbf{x}^0$ начального фронта строятся ортогональные базисные орты $\mathbf{e}_k^0 = \mathbf{e}_k^0(\gamma_2, \gamma_3)$ $(k = 1, 2, 3)$ лучевой системы координат, сохраняющие постоянные значения вдоль отрезка луча. Для точек $\mathbf{x} \equiv (x_k)$ луча вычисляются производные

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_j} = \frac{\partial \mathbf{x}^0}{\partial \gamma_j} + v^2 (\tau - \tau_0) \frac{\partial \mathbf{p}^0}{\partial \gamma_j}, \quad j = 2, 3, \\
\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \gamma_j \partial \gamma_k} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}^0}{\partial \gamma_j \partial \gamma_k} + v^2 (\tau - \tau_0) \frac{\partial^2 \mathbf{p}^0}{\partial \gamma_j \partial \gamma_k}, \quad j, k = 2, 3,
\end{gathered} \tag{4.2}$$

а также (на основе первой группы фомул из (3.14)) вспомогательные величины

$$\begin{gathered}
Q_{ij} = Q_{ij}^0 + v^2 (\tau - \tau_0) P_{ij}^0, \quad Q_{i,jk} = Q_{i,jk}^0 + v^2 (\tau - \tau_0) P_{i,jk}^0, \\
P_{ij} = \left(\frac{\mathbf{e}_i, \partial \mathbf{p}}{\partial \gamma_j} \right), \quad P_{i,jk} = \left(\frac{\mathbf{e}_i, \partial^2 \mathbf{p}}{\partial \gamma_j \partial \gamma_k} \right), \quad i = 1, 2, 3; \; j, k = 2, 3,
\end{gathered} \tag{4.3}$$

посредством которых определяются искомые величины из (3.13).

Заметим, что каждый из отрезков луча может проходиться волной в форме волны одного из возможных типов (P_1, P_2, S). Поэтому все величины в формулах (4.1) – (4.3) относятся к волне заданного типа. Здесь и далее индекс типа волны в формулах опущен.

2. Пусть два соприкасающихся блока среды с номерами $\nu = 1$ и 2 разделены гладкой границей, определяемой уравнениями

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \mathbf{m} = \pm \frac{\operatorname{grad} f(x_k)}{|\operatorname{grad} f(x_k)|},$$

где $\mathbf{m}$ — орт нормали к границе. Обозначим через $\mathbf{N} \equiv (x_k^*)$ точку падения луча на границу, а через $\Pi(\mathbf{N})$ — плоскость падения луча, построенную на ортах[1] $\mathbf{m}(\mathbf{N})$ и $\mathbf{e}_1^-(\mathbf{N}) = \mathbf{e}_1^0$, где второй орт имеет направление падающего луча. В точке $\mathbf{N}$ границы построим вспомогательную систему ортов $\mathbf{t}_k = \mathbf{t}_k(\mathbf{N})$ $(k = 1, 2, 3)$:

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\mathbf{e}_1^- - \cos\theta^- \mathbf{m}}{\sin\theta^-}, \quad \mathbf{t}_2 = \mathbf{m}, \quad \mathbf{t}_3 = [\mathbf{e}_1, \mathbf{m}]. \tag{4.4}$$

Орт $\mathbf{t}_1$ лежит в плоскости падения и касается границы в точке $\mathbf{N}$. Здесь θ^- — угол падения луча, отсчитываемый от положительного направления нормали $\mathbf{m}$. Для определенности будем считать, что лучь падает на границу со стороны блока $\nu = 2$.

3. Лучи падающей и отраженной или прелемленной волн, а также их векторы рефракции $\mathbf{p}^- = \mathbf{e}_1^-/v^-$, $\mathbf{p}^+ = \mathbf{e}_1^+/v^+$ лежат в общей плоскости падения $\Pi(\mathbf{N})$. Значение вектора рефракции $\mathbf{p}^+$ после отражения-преломления определяется известными формулами

$$\begin{gathered}\mathbf{p}^+(\mathbf{N}) = \mathbf{p}^0(\mathbf{N}) + h\mathbf{m}(\mathbf{N}), \\ h = \frac{(\mathbf{e}_1^+, \mathbf{m})}{v^+} - \frac{(\mathbf{e}_1^-, \mathbf{m})}{v^-} = \pm\frac{1}{v^+}\sqrt{1 - \left(\frac{v^+}{v^-}\sin\theta^-\right)^2} - \frac{\cos\theta^-}{v^-},\end{gathered} \tag{4.5}$$

где знак $+$ $(-)$ отвечает преломленной (отраженной) волне. Соотношения (4.5) используются для задания начального значения орта $\mathbf{e}_1^+ \equiv \mathbf{e}_1^+(\mathbf{N})$ лучевого базиса отраженной или преломленной волны. Значения ортов $\mathbf{e}_k^+(\mathbf{N})$ $(k = 2, 3)$ удобно полагать равными

$$\mathbf{e}_3^+(\mathbf{N}) = \mathbf{t}_3(\mathbf{N}), \quad \mathbf{e}_2^+(\mathbf{N}) = [\mathbf{e}_3^+, \mathbf{e}_1^+]. \tag{4.6}$$

При таком выборе ортов выполняются соотношения

$$\begin{aligned}&(\mathbf{e}_1^+, \mathbf{t}_1) = \sin\theta^+, \quad (\mathbf{e}_1^+, \mathbf{t}_2) = \pm\cos\theta^+, \quad (\mathbf{e}_1^+, \mathbf{t}_3) = 0, \\ &(\mathbf{e}_2^+, \mathbf{t}_1) = \mp\cos\theta^+, \quad (\mathbf{e}_2^+, \mathbf{t}_2) = \sin\theta^+, \quad (\mathbf{e}_2^+, \mathbf{t}_3) = 0, \\ &(\mathbf{e}_3^+, \mathbf{t}_1) = 0, \quad (\mathbf{e}_3^+, \mathbf{t}_2) = 0, \quad (\mathbf{e}_3^+, \mathbf{t}_3) = 1.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Здесь выбор знака производится так же, как в (4.5), θ^+ — угол отражения или преломления волны.

В точке $\mathbf{N}$ границы производится коррекция базисных ортов $\mathbf{e}_k^0$ $(k = 2, 3)$ падающей волны

$$\mathbf{e}_1^- = \mathbf{e}_1^0, \quad \mathbf{e}_2^- = \mathbf{e}_2^0(\mathbf{e}_3^0, \mathbf{t}_3) - \mathbf{e}_3^0(\mathbf{e}_2^0, \mathbf{t}_3), \quad \mathbf{e}_3^- = \mathbf{e}_2^0(\mathbf{e}_2^0, \mathbf{t}_3) - \mathbf{e}_3^0(\mathbf{e}_3^0, \mathbf{t}_3), \tag{4.8}$$

в результате которой оказывается выполненным равенство $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3^- = \mathbf{t}_3$. При переходе к базисным ортам $\mathbf{e}_k^-$ $(k = 1, 2, 3)$ составляющие какого-либо вектора $\mathbf{a}$ пересчитываются согласно формулам

$$(\mathbf{e}_2^-, \mathbf{a}) = (\mathbf{e}_2^0, \mathbf{a})(\mathbf{e}_3^0, \mathbf{t}_3) - (\mathbf{e}_3^0, \mathbf{a})(\mathbf{e}_2^0, \mathbf{t}_3),$$

$$(\mathbf{e}_3^-, \mathbf{a}) = (\mathbf{e}_2^0, \mathbf{a})(\mathbf{e}_2^0, \mathbf{t}_3) - (\mathbf{e}_3^0, \mathbf{a})(\mathbf{e}_3^0, \mathbf{t}_3).$$

[1]Здесь и далее все величины, относящиеся к падающей волне, помечены значком "$-$", а величины, соответствующие уходящим от границы волнам, — значком "$+$".

4. Предельные значения величин Q^-_{ij}, $Q^-_{i,jk}$ в точке $\mathbf{N}$ определяются по формулам (4.3), если в них подставить значение $\tau = \tau^*$ времени встречи луча падающей волны с границей раздела.

При выводе граничных условий для величин из (3.14) следует исходить из соотношения непрерывности $\mathbf{x}^-(\tau^*, \gamma_2, \gamma_3) = \mathbf{x}^+(\tau^*, \gamma_2, \gamma_3)$ радиус-векторов падающего и отраженного или преломленного лучей в точке $\mathbf{N}$ на границе раздела. Из этих соотношений вытекают формулы связи между производными

$$\frac{\partial \mathbf{x}^+}{\gamma_j} = \frac{\partial \mathbf{x}^-}{\gamma_j} + \left[\left(\frac{v^+}{v^-}\right)^2 \mathbf{p}^+ - \mathbf{p}^-\right]\left(\frac{\partial \mathbf{x}^+}{\gamma_j}, \mathbf{m}\right)/(\mathbf{p}^-, \mathbf{m}), \quad j = 2, 3,$$

а также между величинами из (3.14), относящимися к падающей и к отраженной или преломленной волнам [5, 6]. В случае плоской границы раздела эти формулы принимают следующий вид[2]:

$$\begin{gathered}
Q^+_{2j}(\mathbf{e}^+_1, \mathbf{m}) = Q^-_{2j}(\mathbf{e}^-_2, \mathbf{m}), \quad Q^+_{3j} = Q^-_{3j}, \quad P^+_{2j}(\mathbf{e}^+_2, \mathbf{t}_1) = P^-_{2j}(\mathbf{e}^-_2, \mathbf{t}_1), \quad P^+_{3j} = P^-_{3j},\\
Q^+_{2,jk}(\mathbf{e}^+_2, \mathbf{t}_1) = Q^-_{2,jk}(\mathbf{e}^-_2, \mathbf{t}_1) + (\mathbf{p}^-, \mathbf{t}_1)[(v^+)^2(P^\top Q)^+_{jk} - (v^-)^2(P^\top Q)^-_{jk}] +\\
+\frac{(\mathbf{e}^-_2, \mathbf{m})}{(v^-)^2(\mathbf{p}^-, \mathbf{m})}\Big\{Q^-_{2k}[(v^+)^2P^+_{2j}(\mathbf{e}^+_2, \mathbf{t}_1) - (v^-)^2P^-_{2j}(\mathbf{e}^-_2, \mathbf{t}_1)] +\\
+Q^-_{2j}[(v^+)^2P^+_{2k}(\mathbf{e}^+_2, \mathbf{t}_1) - (v^-)^2P^-_{2k}(\mathbf{e}^-_2, \mathbf{t}_1)]\Big\} + (\mathbf{p}^-, \mathbf{t}_1)[(v^-)^2 - (v^+)^2]\frac{\partial^2\tau^*}{\partial\gamma_j\partial\gamma_k},\\
Q^+_{3,jk} = Q^-_{3,jk} + \Big\{[(v^+)^2P^+_{3j} - (v^-)^2P^-_{3j}]Q^-_{2k} + [(v^+)^2P^+_{3k} - (v^-)^2P^-_{3k}]Q^-_{2j}\Big\}\frac{(\mathbf{e}^-_2, \mathbf{m})}{(v^-)^2(\mathbf{p}^-, \mathbf{m})},\\
P^+_{2,jk}(\mathbf{e}^+_2, \mathbf{t}_1) = P^-_{2,jk}(\mathbf{e}^-_2, \mathbf{t}_1) + [(v^+)^2(P^\top P)^+_{kj} - (v^-)^2(P^\top P)^-_{kj}]\frac{(\mathbf{e}^-_1, \mathbf{t}_1)}{v^-},\\
Q^+_{3,jk} = Q^-_{3,jk}, \quad C^+_2(\mathbf{e}^+_2, \mathbf{t}_1) = \left(\mathbf{t}_3, \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial\gamma_2}\right) - v^+P^+_{32}(\mathbf{e}^+_1, \mathbf{t}_1),\\
C^+_3(\mathbf{e}^+_2, \mathbf{t}_1) = -\left(\mathbf{t}_3, \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial\gamma_3}\right) + v^+P^+_{33}(\mathbf{e}^+_1, \mathbf{t}_1), \quad \left(\mathbf{t}_3, \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial\gamma_j}\right) = v^-P^-_{3j}\sin\theta^-.
\end{gathered} \tag{4.9}$$

В формулах (4.9) значок $\top$ обозначает операцию транспонирования. Величина $\frac{\partial^2\tau^*}{\partial\gamma_j\partial\gamma_k}$ во второй группе формул (4.9) определяется выражением

$$\frac{\partial^2\tau^*}{\partial\gamma_j\partial\gamma_k} = (P^\top Q)^-_{jk} - \frac{(\mathbf{e}^-_2, \mathbf{m})}{(v^-)^2(\mathbf{p}^-, \mathbf{m})}Q^-_{2,jk} + \frac{(\mathbf{e}^-_2, \mathbf{m})^2}{(\mathbf{e}^-_1, \mathbf{m})^2}(P^-_{2j}Q^-_{2k} + P^-_{2k}Q^-_{2j}). \tag{4.10}$$

5. Вычисление амплитуд отраженных и преломленных волн

Рассмотрим методику вычисления начальных значений в точке $\mathbf{N}$ границы амплитуд основных и примесных составляющих отраженных или преломленных волн на примере контакта двух пористых блоков среды. Случаи контакта двух чисто упругих блоков, либо пористого и чисто упругого, отличаются от рассматриваемого только учетом тех или иных граничных условий, приведенных, например, в [7].

1. Обозначим векторы смещений падающей волны в точках границы раздела через $\mathbf{U}_-$, $\mathbf{W}_-$, а преломленных ($\nu = 1$) и отраженных ($\nu = 2$) волн — соответственно

[2]Для криволинейной границы подобные формулы приведены в [6] и имеют более громоздкий вид.

$\mathbf{U}_{(\nu)}$, $\mathbf{W}_{(\nu)}$ ($\nu = 1, 2$). Граничные условия для случая жеского контакта между двумя упруго-пористыми блоками среды и проницаемости границы записываются в виде следующей системы равенств [7]:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{U}_- + \mathbf{U}_{(2)} = \mathbf{U}_{(1)},\\
&\mathbf{t}_m^{(2)}(\mathbf{U}_- + \mathbf{U}_{(2)}, \mathbf{W}_- + \mathbf{W}_{(2)}) = \mathbf{t}_m^{(1)}(\mathbf{U}_{(1)}, \mathbf{W}_{(1)}),\\
&((\mathbf{W}_- + \mathbf{W}_{(2)}) \cdot \mathbf{m}) = (\mathbf{W}_{(1)} \cdot \mathbf{m}),\\
&S^{(2)}(\mathbf{U}_- + \mathbf{U}_{(2)}, \mathbf{W}_- + \mathbf{W}_{(2)}) = S^{(1)}(\mathbf{U}_{(1)}, \mathbf{W}_{(1)}).
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь использованы обозначения: $\mathbf{t}_m(\mathbf{U}, \mathbf{W})$ — вектор напряжения на площадке с нормалью $\mathbf{m}$, $S(\mathbf{U}, \mathbf{W})$ — давление флюида. Указанные величины определяются формулами

$$\begin{aligned}
&\mathbf{t}_m(\mathbf{U}, \mathbf{W}) = \mathbf{m}(\lambda_c \operatorname{div} \mathbf{U} + \alpha M \operatorname{div} \mathbf{W}) + 2\mu \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{m}} + \mu[\mathbf{m}, \operatorname{rot} \mathbf{U}],\\
&S(\mathbf{U}, \mathbf{W}) = -\alpha M \operatorname{div} \mathbf{U} - M \operatorname{div} \mathbf{W}.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

2. Равенства (5.2) должны выполняться при подстановке в них лучевых разложений тождественно, как относительно времени t, так и координат x_k^* точек границы раздела. Это возможно лишь при условиях

$$f_{np_j}^{(\nu)}(t) \equiv f_{ns}^{(\nu)}(t) \equiv f_n(t), \quad n \geq 0, \quad \tau_{p_j}^{(\nu)}(x_k^*) \equiv \tau_s^{(\nu)}(x_k^*) \equiv \tau(x_k^*), \quad \nu = 1, 2, \tag{5.3}$$

где $f_n(t)$ — временные функции из (1.2).

Подстановка в граничные условия (5.1) амплитудных векторов в форме нулевого приближения лучевого метода и учета соотношений (5.3) приводит к системе равенств

$$\begin{aligned}
&\mathbf{U}_{(1)p_1}^{(0)} + \mathbf{U}_{(1)p_2}^{(0)} + \mathbf{U}_{(1)s}^{(0)} - \mathbf{U}_{(2)p_1}^{(0)} - \mathbf{U}_{(2)p_2}^{(0)} - \mathbf{U}_{(2)s}^{(0)} = \mathbf{U}^{(0)-},\\
&\big((\mathbf{W}_{(1)p_1}^{(0)} + \mathbf{W}_{(1)p_2}^{(0)} + \mathbf{W}_{(1)s}^{(0)} - \mathbf{W}_{(2)p_1}^{(0)} - \mathbf{W}_{(2)p_2}^{(0)} - \mathbf{W}_{(2)s}^{(0)}) \cdot \mathbf{m}\big) = (\mathbf{W}^{(0)-} \cdot \mathbf{m}),\\
&\mathbf{T}^{(1)}(\mathbf{U}_{(1)p_1}^{(0)}, \mathbf{W}_{(1)p_1}^{(0)}) + \mathbf{T}^{(1)}(\mathbf{U}_{(1)p_2}^{(0)}, \mathbf{W}_{(1)p_2}^{(0)}) + \mathbf{T}^{(1)}(\mathbf{U}_{(1)s}^{(0)}, \mathbf{W}_{(1)s}^{(0)}) +\\
&+\mathbf{T}^{(2)}(\mathbf{U}_{(2)p_1}^{(0)}, \mathbf{W}_{(2)p_1}^{(0)}) + \mathbf{T}^{(2)}(\mathbf{U}_{(2)p_2}^{(0)}, \mathbf{W}_{(2)p_2}^{(0)}) +\\
&+\mathbf{T}^{(2)}(\mathbf{U}_{(2)s}^{(0)}, \mathbf{W}_{(2)s}^{(0)}) = \mathbf{T}^{(2)}(\mathbf{U}^{(0)-}, \mathbf{W}^{(0)-}),\\
&S^{(1)}(\mathbf{U}_{(1)p_1}^{(0)}, \mathbf{W}_{(1)p_1}^{(0)}) + S^{(1)}(\mathbf{U}_{(1)p_2}^{(0)}, \mathbf{W}_{(1)p_2}^{(0)}) - S^{(2)}(\mathbf{U}_{(2)p_1}^{(0)}, \mathbf{W}_{(2)p_1}^{(0)}) -\\
&-S^{(2)}(\mathbf{U}_{(2)p_2}^{(0)}, \mathbf{W}_{(2)p_2}^{(0)}) = S^{(2)}(\mathbf{U}^{(0)-}, \mathbf{W}^{(0)-}),
\end{aligned} \tag{5.4}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^{(\nu)}(\mathbf{U}^{(0)}, \mathbf{W}^{(0)}) &= \mathbf{m}[\lambda_c^{(\nu)}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{U}^{(0)}) + \alpha_{(\nu)} M^{(\nu)}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{W}^{(0)})] +\\
&\quad + \mu^{(\nu)}[(\mathbf{p} \cdot \mathbf{m})\mathbf{U}^{(0)} + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{U}^{(0)})\mathbf{p}],\\
S^{(\nu)}(\mathbf{U}^{(0)}, \mathbf{W}^{(0)}) &= -\alpha^{(\nu)} M^{(\nu)}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{U}^{(0)}) - M^{(\nu)}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{W}^{(0)}), \quad \nu = 1, 2.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

3. Пусть амплитудные векторы падающей волны в нулевом приближении представляются в виде

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U}^- \equiv \mathbf{U}_-^{(0)} &= \sum_{i=1,2} u_{1p_i}^- \mathbf{e}_{1p_i}^- + \sum_{k=2,3} u_{ks}^- \mathbf{e}_{ks}^-,\\
\mathbf{W}^- \equiv \mathbf{W}_-^{(0)} &= \sum_{i=1,2} w_{1p_i}^- \mathbf{e}_{1p_i}^- + \sum_{k=2,3} w_{ks}^- \mathbf{e}_{ks}^-,
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

обобщающем случаи падения P_i- и S-волны. Обозначим через $\theta_{p_i}^-$, θ_s^- углы падения, а через $\theta_{p_i}^{(\nu)}$ $(i = 1, 2)$, $\theta_s^{(\nu)}$ углы отражения $(\nu = 2)$ и преломления $(\nu = 1)$ волн типа P_1, P_2 и S.

С учетом представления падающего поля в виде (5.6), а также формул из (2.13) и (2.8), устанавливающих связь между составляющими u_{1p_i}, u_{ks} и w_{1p_i}, w_{ks}, равенства (5.4) записываются в виде системы восьми уравнений относительно амплитуд $u_{1p_i}^{(\nu)}$, $u_{ks}^{(\nu)}$ отраженных и преломленных волн. В матричной форме система уравнений принимает вид

$$
\mathbf{G}\mathbf{X} = \sum_{i=1,4} \mathbf{F}_i \mathbf{U}_i^-,
\tag{5.7}
$$

где матрица $\mathbf{G}$ системы есть

$$
\begin{pmatrix}
\sin\theta_{p_1}^{(1)} & \sin\theta_{p_2}^{(1)} & -\cos\theta_s^{(1)} & 0 & -\sin\theta_{p_1}^{(2)} & -\sin\theta_{p_2}^{(2)} & -\cos\theta_s^{(2)} & 0\\
\cos\theta_{p_1}^{(1)} & \cos\theta_{p_2}^{(1)} & \sin\theta_s^{(1)} & 0 & \cos\theta_{p_1}^{(2)} & \cos\theta_{p_2}^{(2)} & -\sin\theta_s^{(2)} & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1\\
\frac{a_{p_1}^{(1)}}{v_{p_1}^{(1)}} & \frac{a_{p_2}^{(1)}}{v_{p_2}^{(1)}} & \frac{c_s^{(1)}}{v_s^{(1)}} & 0 & \frac{a_{p_1}^{(2)}}{v_{p_1}^{(2)}} & \frac{a_{p_2}^{(2)}}{v_{p_2}^{(2)}} & \frac{-c_s^{(2)}}{v_s^{(2)}} & 0\\
\frac{b_{p_1}^{(1)}}{v_{p_1}^{(1)}} & \frac{b_{p_2}^{(1)}}{v_{p_2}^{(1)}} & \frac{a_s^{(1)}}{v_s^{(1)}} & 0 & \frac{-b_{p_1}^{(2)}}{v_{p_1}^{(2)}} & \frac{-b_{p_2}^{(2)}}{v_{p_2}^{(2)}} & \frac{a_s^{(2)}}{v_s^{(2)}} & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{g_s^{(1)}}{v_s^{(1)}} & 0 & 0 & 0 & \frac{g_s^{(2)}}{v_s^{(2)}}\\
d_{p_1}^{(1)} & d_{p_2}^{(1)} & h_s^{(1)} & 0 & d_{p_1}^{(2)} & d_{p_2}^{(2)} & -h_s^{(2)} & 0\\
\frac{g_{p_1}^{(1)}}{v_{p_1}^{(1)}} & \frac{g_{p_2}^{(1)}}{v_{p_2}^{(1)}} & 0 & 0 & \frac{-g_{p_1}^{(2)}}{v_{p_1}^{(2)}} & \frac{-g_{p_2}^{(2)}}{v_{p_2}^{(2)}} & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

Вектор-столбцы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{F}_i$ определяются выражениями

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X} &= \left(u_{1p_1}^{(1)}, u_{1p_2}^{(1)}, u_{2s}^{(1)}, u_{3s}^{(1)}, u_{1p_1}^{(2)}, u_{1p_2}^{(2)}, u_{2s}^{(2)}, u_{3s}^{(2)}\right)^\top,\\
\mathbf{F}_i &= \left(\sin\theta_{p_i}^-, \cos\theta_{p_i}^-, 0, \frac{a_{p_i}^{(2)-}}{v_{p_i}^{(2)}}, \frac{b_{p_i}^{(2)-}}{v_{p_i}^{(2)}}, 0, d_{p_i}^{(2)-}, -\frac{g_{p_i}^{(2)-}}{v_{p_i}^{(2)}}\right)^\top, \quad i = 1, 2,\\
\mathbf{F}_3 &= \left(-\cos\theta_s^-, \sin\theta_s^-, 0, \frac{c_s^{(2)-}}{v_s^{(2)}}, \frac{a_s^{(2)-}}{v_s^{(2)}}, 0, h_s^{(2)-}, 0\right)^\top,\\
\mathbf{F}_4 &= \left(0, 0, 1, 0, 0, \frac{\mu^{(2)}}{v_s^{(2)}}\cos\theta_s^-, 0, 0\right)^\top.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

В приведенных формулах использованы обозначения

$$
\begin{aligned}
&a_r^{(\nu)} = 2\mu^{(\nu)}\sin\theta_r^{(\nu)}\cos\theta_r^{(\nu)}, \quad b_r^{(\nu)} = \lambda_c^{(\nu)}\sin^2\theta_r^{(\nu)} + H^{(\nu)}\cos^2\theta_r^{(\nu)} + \alpha^{(\nu)}M^{(\nu)}æ_r^{(\nu)},\\
&g_r^{(\nu)} = -M^{(\nu)}(\alpha^{(\nu)} - æ_r^{(\nu)}), \quad d_r^{(\nu)} = æ_r^{(\nu)}\cos\theta_r^{(\nu)},\\
&æ_r^{(\nu)} = -\frac{H^{(\nu)} - \rho^{(\nu)}(v_r^{(\nu)})^2}{\alpha^{(\nu)}M^{(\nu)} - \rho^{(\nu)}(v_r^{(\nu)})^2}, \quad r = 1, 2,
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

$$c_s^{(\nu)} = \mu^{(\nu)}(\sin^2\theta_s^{(\nu)} - \cos^2\theta_s^{(\nu)}), \quad q_s^{(\nu)} = \mu^{(\nu)}\cos\theta_s^{(\nu)},$$
$$h_s^{(\nu)} = \frac{-\rho_f^{(2)}}{\rho_m^{(2)}}\sin\theta_s^{(\nu)}, \quad H^{(\nu)} = \lambda_c^{(\nu)} + 2\mu^{(\nu)}, \quad \nu = 1, 2.$$

Индекс r в (5.9) определяет тип волны ($r = 1 - P_1$, $r = 2 - P_2$, $r = 3 - S$).

Неизвестные амплитуды $w_{1p_i}^{(\nu)}$ и $w_{ks}^{(\nu)}$ отраженных и преломленных волн определяются по вычисленным значениям $u_{1p_i}^{(\nu)}$ и $u_{ks}^{(\nu)}$ при помощи формул

$$w_{ks}^{(\nu)} = -\frac{\rho_f^{(\nu)}}{\rho_m^{(\nu)}}u_{ks}^{(\nu)}, \quad w_{1p_i}^{(\nu)} = \frac{\alpha^{(\nu)}M^{(\nu)} - \rho_f^{(\nu)}(v_{p_i}^{(\nu)})^2}{M^{(\nu)} - \rho_m^{(\nu)}(v_{p_i}^{(\nu)})^2}u_{1p_i}^{(\nu)}.$$

По найденным значениям амплитуд $u_{1p_i}^{(\nu)}$ и $u_{ks}^{(\nu)}$ функции $\Psi_{p_i}^{(\nu)}(\gamma_2, \gamma_3)$ и $\Psi_s^{(\nu)}(\gamma_2, \gamma_3)$ из (3.11) определяются выражениями

$$\Psi_{p_i}^{(\nu)} = u_{1p_i}^{(\nu)}\sqrt{v_{p_i}^{(\nu)}}L_{p_i}^{(\nu)}, \quad \Psi_s^{(\nu)} = u_{ks}^{(\nu)}\sqrt{v_s^{(\nu)}}L_s^{(\nu)}. \tag{5.10}$$

4. Наконец, для вычисления величин

$$(\mathbf{e}_{2r}^{(\nu)}, \operatorname{grad}\Psi_r^{(\nu)}), \quad (\mathbf{e}_{3r}^{(\nu)}, \operatorname{grad}\Psi_r^{(\nu)}), \quad r = 1, 2, 3;\ \nu = 1, 2, \tag{5.11}$$

используемых при определении граничных значений примесных составляющих амплитудных функций P_i- и S-волн, следует рассмотреть систему уравнений [5, 6]

$$\mathbf{G}\frac{d\mathbf{X}}{d\gamma_j} = \sum_{i=1,4}\left(\frac{d\mathbf{F}_i}{d\gamma_j}\mathbf{U}_i^- + \mathbf{F}_i\frac{d\mathbf{U}_i^-}{d\gamma_j}\right) - \frac{d\mathbf{G}}{d\gamma_j}\mathbf{X}, \quad j = 2, 3, \tag{5.12}$$

получаемую полным дифференцированием по γ_j в точке $\mathbf{N}$ системы (5.7), в которой лучевая координата $\tau = \tau^*(\gamma_2, \gamma_3)$ является функцией от гаусовых координат начальной поверхности фронта волны. В правые части (5.12) входят величины, определяемые на предыдущем этапе вычислений. Поэтому система (5.12) позволяет найти значения производных $du_n^{(\nu)}/d\gamma_j$, где $u_n^{(\nu)}$ — составляющие вектора $\mathbf{X}$ из (5.8). Искомые частные производные $\partial u_{nr}^{(\nu)}/\partial\gamma_j$ вычисляются при помощи формул [5]

$$\frac{\partial u_n^{(\nu)}}{\partial\gamma_j} = \frac{du_n^{(\nu)}}{d\gamma_j} + u_{nr}^{(\nu)}Q_{2j}^{(\nu)}\frac{(k_2^{(\nu)} + k_3^{(\nu)})}{2}\frac{(\mathbf{e}_{2r}^{+(\nu)}, \mathbf{m})}{(\mathbf{p}^{(\nu)}, \mathbf{m})},$$
$$j = 2, 3;\ n = 1, 2, 3, 4;\ \nu = 1, 2, \tag{5.13}$$

где

$$k_2^{(\nu)} = \left(P_{23}^{(\nu)}Q_{32}^{(\nu)} - P_{22}^{(\nu)}Q_{33}^{(\nu)}\right)/\Lambda^{(\nu)}, \quad k_2^{(\nu)} = \left(P_{32}^{(\nu)}Q_{23}^{(\nu)} - P_{33}^{(\nu)}Q_{22}^{(\nu)}\right)/\Lambda^{(\nu)}. \tag{5.14}$$

При этом величины из (5.11) определяются формулами

$$(\mathbf{e}_{2r}^{(\nu)}, \operatorname{grad}\Psi_r^{(\nu)}) = \left(Q_{33}^{(\nu)}\frac{\partial\Psi_r^{(\nu)}}{\partial\gamma_2} - Q_{32}^{(\nu)}\frac{\partial\Psi_r^{(\nu)}}{\partial\gamma_3}\right)/\Lambda^{(\nu)},$$
$$(\mathbf{e}_{3r}^{(\nu)}, \operatorname{grad}\Psi_r^{(\nu)}) = \left(Q_{22}^{(\nu)}\frac{\partial\Psi_r^{(\nu)}}{\partial\gamma_3} - Q_{23}^{(\nu)}\frac{\partial\Psi_r^{(\nu)}}{\partial\gamma_2}\right)/\Lambda^{(\nu)}, \tag{5.15}$$

в которых

$$\frac{\partial \Psi_{p_i}^{(\nu)}}{\partial \gamma_j} = \left(\frac{\partial u_{1p_i}^{(\nu)}}{\partial \gamma_j} + \frac{u_{1p_i}^{(\nu)}}{L_{p_i}^{(\nu)}} \frac{\partial L_{p_i}^{(\nu)}}{\partial \gamma_j} \right) \sqrt{v_{p_i}^{(\nu)}} L_{p_i}^{(\nu)},$$

$$\frac{\partial \Psi_{s}^{(\nu)}}{\partial \gamma_j} = \left(\frac{\partial u_{ks}^{(\nu)}}{\partial \gamma_j} + \frac{u_{ks}^{(\nu)}}{L_{s}^{(\nu)}} \frac{\partial L_{s}^{(\nu)}}{\partial \gamma_j} \right) \sqrt{v_{s}^{(\nu)}} L_{s}^{(\nu)}, \qquad (5.16)$$

$$\frac{\partial L_{r}^{(\nu)}}{\partial \gamma_j} = \frac{R_j^{(\nu)}}{2L_r^{(\nu)}}, \quad j = 2, 3.$$

Что же касается правых частей уравнений (5.12), в которых требуется вычисление полных производных по γ_i от величин U_i^-, а также матриц Γ и F_k, то значения $dU_i^-/d\gamma_j$, очевидно, должны определяться по формулам вида (5.13) при $\nu = 2$, а полные производные от матриц Γ и F_k вычисляются при учете формулы [5]:

$$\frac{d\theta^{(\nu)}}{d\gamma_j} = (-1)^{\nu} \left[v^{(\nu)} P_{2j}^{(\nu)} + \left(\mathbf{t}_1, \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \gamma_j} \right) \right], \quad j = 2, 3.$$

В заключение отметим, что, несмотря на громоздкость формул, все вычисления могут быть реализованы на компьютере. Некоторые результаты таких вычислений для простейших моделей кусочно-однородной чисто упругой среды и сопоставления их с результатами, получаемыми при математически точном решении задачи, приведены в [8].

Указатель литературы

1. *Biot M. A.* Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media // J. Appl. Phys. 1962. Vol. 33. P. 1482–1498.
2. *Петрашень Г.И.* О лучевом методе и поляризации объемных сейсмических волн // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 21. Л., 1981. С. 5–53.
3. *Ковтун А. А., Решетников В. В.* Распространение плоских волн в анизотропных упругопористых насыщенных средах без диссипации // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 4. Физика, химия. 1995. Вып. 4. С. 5–12.
4. *Петрашень Г. И., Кучер В. И., Каштан Б. М.* К вычислению примесных составляющих 1-го приближения лучевого метода в случае изотропных произвольно-неоднородных упругих сред. Л., 1988. 18 с. Препринт ЛОМИ № Р–6–88.
5. *Петрашень Г. И., Кучер В. И., Каштан Б. М.* К вычислению примесных составляющих 1-го приближения лучевого метода в случае изотропных произвольно-неоднородных упругих сред. II. Л., 1988. 16 с. Препринт ЛОМИ № Р–11–88.
6. *Кучер В. И.* Алгоритмы вычисления примесных составляющих 1-го приближения лучевого метода в случае изотропных кусочно-однородных сред // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 28. Л., 1989. С. 8–21.
7. *Lauriks W., Allard J., Depollier C., Cops A.* Inhomogeneous plane waves in layered materials including fluid, solid and porous layers // Wave Motion. 1991. Vol. 13. P. 329–336.
8. *Кучер В. И., Киселев Ю. В.* Оценка примесных компонент 1-го приближения лучевого метода при явлениях отражения-преломления упругих волн // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 29. Л., 1990. С. 130–138.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 94–05–17622), а также гранта 17–6.1–5 по фундаментальным исследованиям в области геологии в системе Министерства общего и профессионального образования РФ.