

И. М. Петрова, Л. Н. Порохова

РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕСТИРОВАНИЯ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ 2D ЗАДАЧИ МТЗ

Обратная задача МТЗ состоит в определении электропроводности σ в Земле по данным, полученным в результате измерений на ее поверхности компонент естественного электромагнитного поля. Электропроводность в общем случае есть функция трех переменных, роль которых играют пространственные координаты.

В настоящее время известны алгоритмы поиска электропроводности для одно-, двух- и трехмерных сред. Современные способы решения задачи для случая двумерной функции электропроводности обеспечивают баланс между правдоподобием полученного решения и затратой компьютерных ресурсов, что указывает на их преимущество относительно 1D и 3D алгоритмов.

Общий подход при решении обратной 2D задачи МТЗ заключается в следующем. На первом этапе линеаризуется оператор прямой задачи. Далее определяется невязка как мера адекватности теоретических данных экспериментальным и на решение накладываются дополнительные ограничения, регуляризирующие это решение и тем самым сводя изначально некорректно поставленную обратную задачу к корректно поставленной. С учетом этих условий строится целевая функция и ищется решение, удовлетворяющее минимуму этой функции.

Среди опубликованных в последние годы работ можно выделить два направления.

1. Решение ищется в евклидовом пространстве параметрическими методами [1–3]. На исследуемую область натягивается прямоугольная сетка, где каждой ячейке соответствует постоянная функция $\sigma(y, z)$. Тогда поиск $\sigma(y, z)$ сводится к одновременному решению недоопределенной системы линейных уравнений.

2. Решение ищется в гильбертовом пространстве [4, 5]. Методы, разработанные для этого направления, являются “псевдодвумерными”, решение ищется для каждой фиксированной точки, где на поверхности Земли проведены измерения, но оператор прямой задачи берется двумерным.

Метод, предлагаемый в настоящей работе, относится ко второму направлению и является модификацией метода, описанного в [5].

Постановка задачи

Пусть по оси y в точках $y_p (p = 1, 2, \dots, I)$ на поверхности Земли имеются данные магнитотеллурического зондирования в виде комплексных значений импедансов Z^E, Z^H для разных частот $\omega_k (k = 1, 2, \dots, K)$ и погрешности d_{kp}^E, d_{kp}^H . Требуется найти оценку функции электропроводности $\sigma(y, z)$ в плоскости YZ . Оператор прямой задачи известен. Решение задачи ищется в классе, где все функции, зависящие от $\sigma(y, z)$, удовлетворяют условию гладкости по оси y , и их градиенты по z значительно больше градиентов по y .

Алгоритм построения решения

Подробное описание алгоритма можно найти в работе [5]. Здесь мы приводим только общую схему построения решения.

Мера адекватности теоретических данных экспериментальным для каждой точки $y = y_p$, где проведены измерения, выбирается в виде

$$S_p = \sqrt{\sum_{k=1}^K \left| \frac{U_{kp} - A_{kp}(\sigma)}{d_{kp}^{E,H}} \right|^2}. \quad (1)$$

Здесь совокупность экспериментальных данных $U_{kp} = Z_{kp}^{E,H}$, оператор прямой задачи $A_{kp}(\sigma) = \tilde{Z}_k^{E,H}(y_p, z)$.

Линеаризация оператора прямой задачи в окрестности $\delta\sigma$ любой σ_0 из выбранного класса моделей в каждом вертикальном ряду

$$A_{kp}(\sigma) = A_{kp}(\sigma_0) + A_{kp}^L(\sigma_0) + A_{kp}^N(\sigma_0) \quad (2)$$

дает выражения для линейных членов:

$$A_{kp}^L = \int_0^h G_k(y_p, z) \delta\sigma dz, \quad (3)$$

и нелинейных:

$$|A_{kp}^N| \leq \int_0^h |V(y_p, z)| \delta\sigma^2 dz, \quad (4)$$

где h — глубина затухания естественного электромагнитного поля.

Здесь $G_k(y_p, z)$ — ядра дифференциала Фреше: $G_k(y_p, z) = -\frac{E_x^2(\omega_k, y_p, z)}{H_y^2(\omega_k, y_p, 0)}$ —

для E -поляризованного поля, $G_k(y_p, z) = \frac{E_y^2(\omega_k, y_p, z)}{H_x^2(\omega_k, y_p, 0)}$ — для H -поляризованного, и функция $V(y_p, z)$ определяется нами как

$$V(y_p, z) = \sum_{k=1}^K \left| \frac{F_k(y_p, z)}{d_{kp}^{E,H}} \right|, \quad |F_k(y_p, z)| = \frac{|G_k(y_p, z)|}{\sigma(y_p, z)}. \quad (5)$$

Разложение для оператора прямой задачи (2) подставим в формулу (1). С учетом выражений (3)–(5) получаем оценку сверху функционала невязки:

$$S_p(\sigma) \leq \left\| \delta U - \int_0^h Q \delta\sigma dz \right\| + \int_0^h V(y_p, z) (\delta\sigma)^2 dz. \quad (6)$$

Здесь вектор δU и вектор-функция $Q(y_p, z)$ по определению равны:

$$\delta U_{2k-1p} + i\delta U_{2kp} = \frac{Z_k^{E,H}(y_p, 0) - \tilde{Z}_{kp}^{E,H}}{d_{kp}^{E,H}}, \quad Q_{2k-1p} + iQ_{2kp} = \frac{G_k^{E,H}(y_p, z)}{d_{kp}^{E,H}}.$$

Задача на минимум функционала в правой части (6) дает выражение для функции $\delta\sigma(y_p, z)$:

$$\delta\sigma(y_p, z) = \frac{\delta U^T (B + S_p I)^{-1} Q}{V(y_p, z)}, \quad (7)$$

где элементы матрицы B : $b_{kk_1p} = \int_0^h \frac{Q_{kp} Q_{k_1p}}{V(y_p, z)} dz, k, k_1 = 1, 2, \dots, K$.

Поиск функции электропроводности $\sigma(y, z)$ сводится к построению последовательности функций $\sigma(y_p, z)$, обеспечивающих минимум невязкам S_p :

$$\sigma_r(y_p, z) = \sigma_{r-1}(y_p, z) + \delta\sigma(y_p, z), \quad (8)$$

где r — номер итерации.

Отметим, что использование двух оценок — для невязок S_p и для нелинейных членов $A_{kp}^N(\sigma)$ оператора прямой задачи — позволило свести некорректно поставленную задачу $\min S_p(\sigma)$, $\sigma_r \in R$ к корректно поставленной $\min S_p(\delta\sigma)$, $\delta\sigma \in \Omega_r \in R$ (здесь R — гильбертово пространство, Ω — замкнутая связная область). В результате этой процедура построения последовательности (8) устойчива.

Опробование алгоритма на модельных примерах

Приведенный алгоритм был воплощен в пакет компьютерных программ и протестирован на большом количестве моделей. Наиболее типичные из них представлены на рис. 1.

Исходные для инверсии данные создавались следующим образом. Для каждой исследуемой модели рассчитывались амплитудные и фазовые данные посредством 2D оператора прямой задачи. Вычисления осуществлялись методом конечных разностей по алгоритму, разработанному И.Л. Варданянц [6]. Затем полученные кривые осложнялись ошибками: 5 % для ρ_T и $\pm 3^\circ$ для ϕ_T .

Поиск решения обратной задачи проводился в узлах сетки, которая строилась по следующему принципу. Вертикальные линии совпадают с точками, для которых даны исходные амплитудные и фазовые кривые (точки зондирования в случае обработки реальных экспериментальных данных). Правая и левая границы удалены от аномалий на расстояние, большее чем половина длины волны в слое наибольшего сопротивления для максимального периода. Горизонтальные линии проводятся в зависимости от скин-глубин. Нижняя граница располагается на такой глубине, чтобы достигнувшая ее электромагнитная волна была однородной. Вся сетка дробится в случае, если соседние ячейки различаются по своим размерам более, чем в 4 раза. На каждом шаге итераций во всех горизонтальных точках y_p по формуле (1) вычислялись вместе с очередной функцией электропроводности $\sigma_r(y_p, z)$ невязки S_p . Итерационный процесс продолжался до тех пор, пока все невязки не стабилизируются. Контрольной величиной служила максимальная невязка \tilde{S} из всех имеющихся S_p (на каждом шаге итераций максимальная невязка может переходить от одной горизонтальной точки к другой), и поиск решения прекращался, когда выполнялось условие

$$\left| \frac{\tilde{S}_{r-1} - \tilde{S}_r}{\tilde{S}_{r-1}} \right| \leq 0,001. \quad (9)$$

При тестировании алгоритма мы использовали две методики:

1) "средняя" инверсия — на каждом шаге итераций используется вся совокупность данных — и для ТЕ- и для ТМ-моды. Тогда в формулах (1)–(7) значок k принимает значения от 1 до $2K$, и все элементы с $k = 1, 2, \dots, K$ соответствуют ТЕ-моду, а элементы с $k = K + 1, K + 2, \dots, 2K$ — ТМ-моду. Процесс контролируется общей для обеих поляризаций невязкой. В итоге получаем решение, удовлетворяющее обеим поляризациям в среднем;

2) "последовательная" инверсия — чередование ТЕ- и ТМ-мод, причем финальный результат предыдущей инверсии принимается за начальное приближение для

последующей, и каждая инверсия контролируется собственной невязкой (отметим, что подобная методика была предложена в работе [3], но процесс инверсии контролировался невязкой, соответствующей ТЕ-моду).

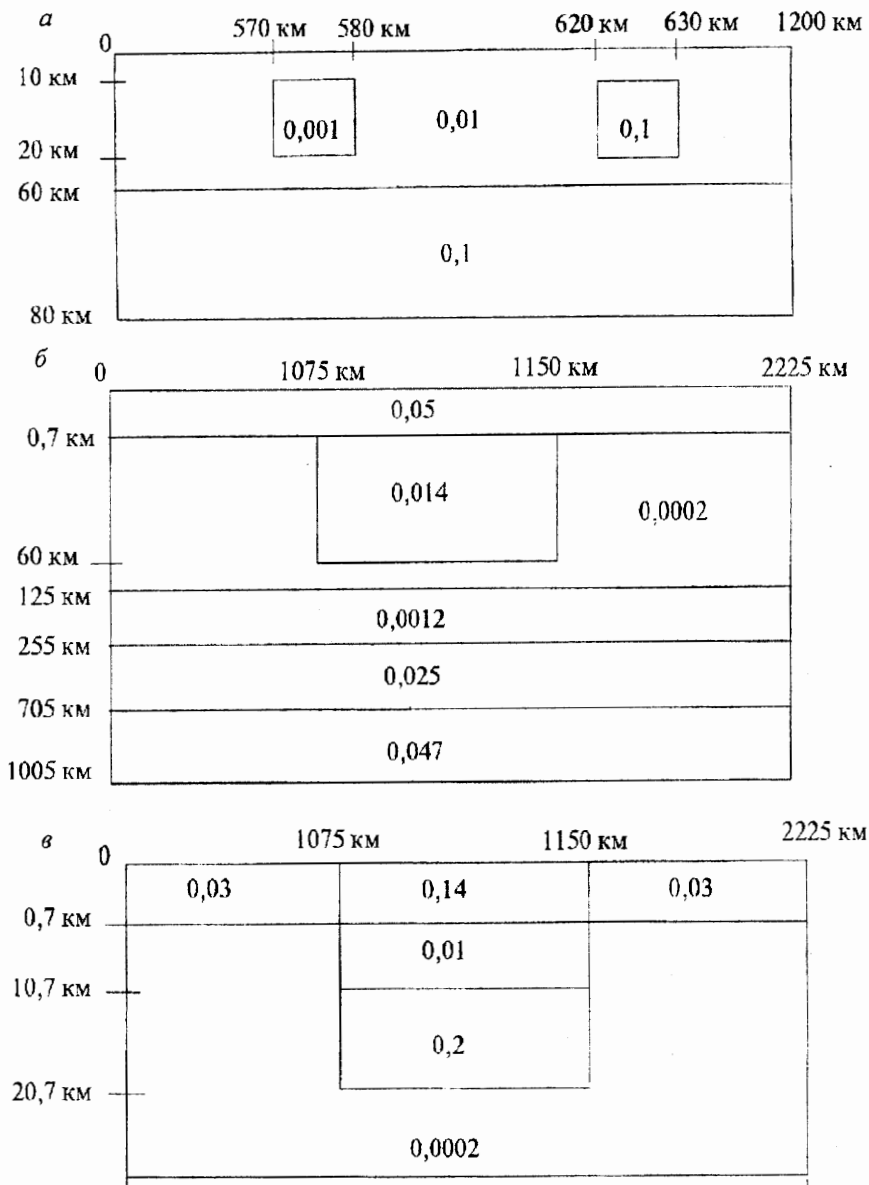


Рис. 1. Типичные модели из подверженных бимодальной инверсии.

а — модель 1 [2, 4, 7]; б — модель 2 [8]; в — модель 3 [8].

При опробовании алгоритма и отработки методик несколько моделей подверглись инверсии с использованием трех вариантов начального распределения электропроводности: однородная среда; семейство 1D функций $\sigma_p(z)$, синтезированных в 2D разрез; псевдоразрез.

Заранее отметим, что результаты, полученные для всех моделей, совпадают для случаев, когда за начальное приближение принимается псевдоразрез и 1D семейство функций $\sigma_p(z)$.

Модель 1 (рис. 1, а) была предложена в работах [2, 4, 7]. Электропроводности вставок — призм отличаются друг от друга на два порядка и на один порядок — от вмещающей среды. Как и в указанных работах, был использован диапазон периодов $\sqrt{T} \in [2,12; 28,3]c^{0,5}$. Размер сетки 31×22 .

При проведении инверсии по первой методике после 33 итераций была достигнута максимальная невязка $\tilde{S} = 11,8$. Непроводящая аномалия вполне четко определилась в горизонтальном направлении, глубина ее залегания завышена почти на 5 км (рис. 2, а). Проводящая структура также выделилась, но размеры ее не соответствуют модельным: границы расплываются, вся аномалия сильно вытянута по глубине и сливается с подстилающим проводящим слоем. Отметим, что подобная картина — “тень” от проводящей аномалии присуща алгоритмам [4, 7], имеющим сходные черты с предложенным нами (например, использование ядер Фреше).

При опробовании второй методики невязка \tilde{S} достигла своего минимального значения 4,9 и стабилизировалась после $E - H - E$ -инверсии (общее число итераций — 45), обеспечивая хорошее совпадение в теоретических и экспериментальных кривых $\rho_T^{E,H}$, $\phi_T^{E,H}(\sqrt{T})$ (рис. 2, в). Полученный разрез (рис. 2, б) выделил все заложенные в модель структуры, согласующиеся в рамках погрешности вычислений с модельными параметрами. Верхняя кромка проводящей призмы оказалась ближе к ее модельному положению, непроводящая, как и в предыдущем случае, опущена примерно на 5 км глубже, чем в модели (такие же свойства были отмечены для решения, представленного в работе [7]). Расплывание, как при средней инверсии, теперь не наблюдается: на каждом этапе решения задачи $\sigma^E(y, z)$ и $\sigma^H(y, z)$ корректируют и уточняют друг друга, постепенно приближаясь к модельному значению электропроводности.

В случае, когда в качестве начального приближения берется однородное полупространство, решение, полученное по второй методике (рис. 3, б), и скорость сходимости итерационного процесса совпали с результатом, полученным из псевдоразреза. Инверсия, проведенная по первой методике, дала для такого начального приближения более грубый результат (рис. 3, а): $\tilde{S} = 13,2$ после 38 итераций. Еще раз отметим, что описанная независимость от указанных вариантов выбора начального приближения действительно не только для простейших моделей, подобных модели 1, но и для моделей, аналогичных модели 2, модели 3 и еще более сложных. Например, если в качестве начального приближения для модели 2 и модели 3 взять однородную среду с $\sigma = 0,0002$ См/м, то итерационный процесс прекращается почти через 200 итераций, а решение получается практически такое же, как и для двух других вариантов начального распределения электропроводности. Таким образом, выбор начального приближения влияет лишь на скорость сходимости итерационного процесса и незначительно — на окончательное решение. Поэтому далее речь пойдет о решении, едином для указанных вариантов построения начального приближения. Модель 2 (рис. 1, б) и модель 3 (рис. 1, в) являются простейшими моделями Чудской аномалии, расположенной на южном склоне Балтийского щита [8]. Выбран интервал периодов $\sqrt{T} \in [1, 70]c^{0,5}$, характерный для проведения МТЗ в этом районе. Размеры сетки 23×24 . Нижняя граница находится на глубине $z \sim 1000$ км. Значение $\sigma(y, z)$ на глубинах > 100 км строилось по данным глобального распределения электропроводности (на рис. 4 эта часть не приведена, наибольший интерес вызывают глубины до 100 км). Обе модели отличаются сильной контрастностью аномальной проводящей

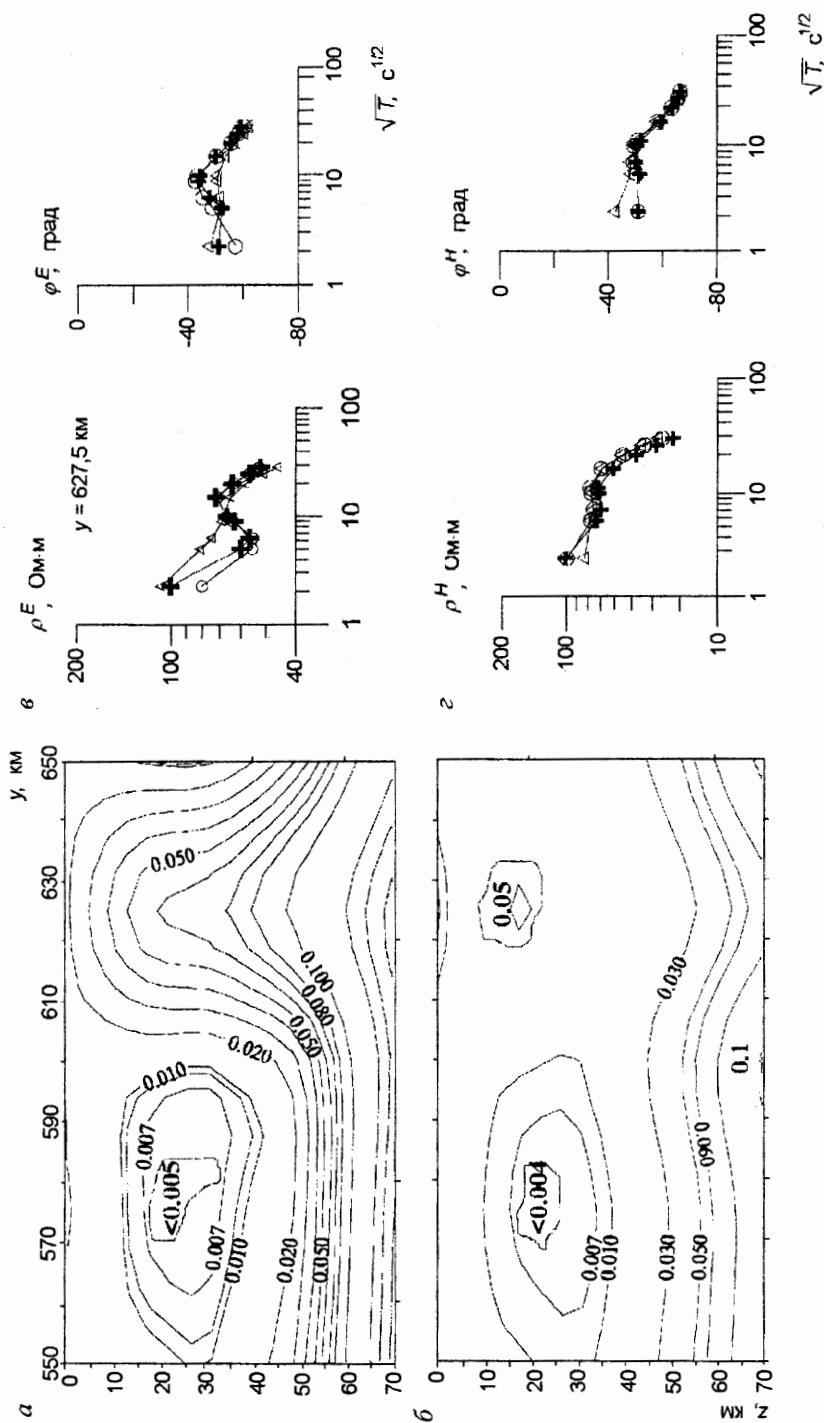


Рис. 2. Модель 1.

Представлены только верхние 70 км, цифры на изолиниях означают электропроводность, См/м). В качестве начального приближения взят псевдо-разрез, построенный по данным, соответствующим TE-моду. а — результат “последовательной” инверсии; б — результат “средней” инверсии; в, г — амплитудные и фазовые кривые для точки с максимальной невязкой (крестики — экспериментальные данные, кружки — “последовательная” инверсия, треугольники — “суммарная”).

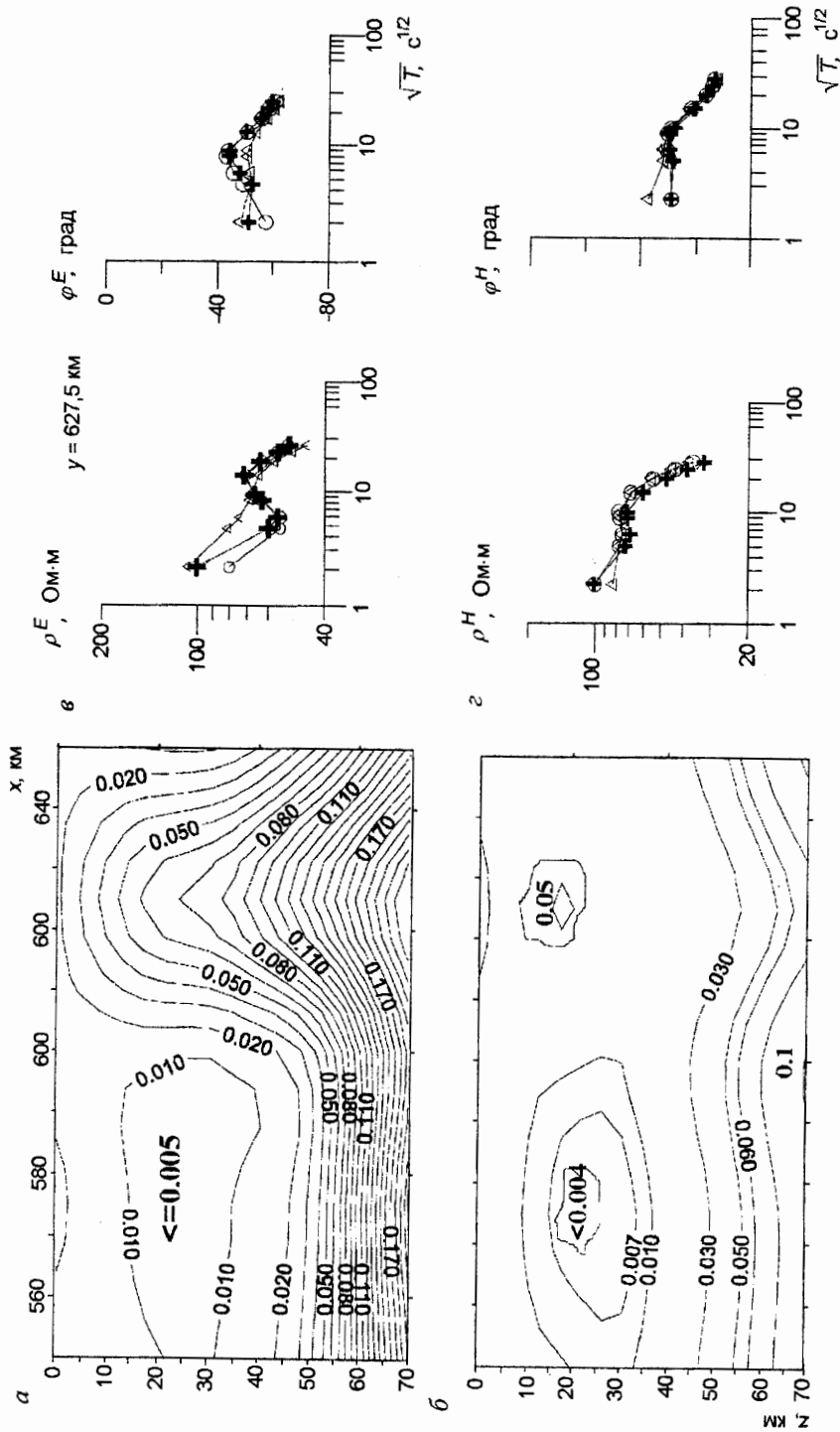


Рис. 3. Модель 1.

Представлены только верхние 70 км, цифры на изолиниях означают электропроводность, См/м. В качестве начального приближения взята однородная среда с электропроводностью 0,01 См/м. а — результат “последовательной” инверсии; б — результат “средней” инверсии; в, г — амплитудные и фазовые кривые для точки с максимальной невязкой (обозначения те же, что на рис. 2, в).

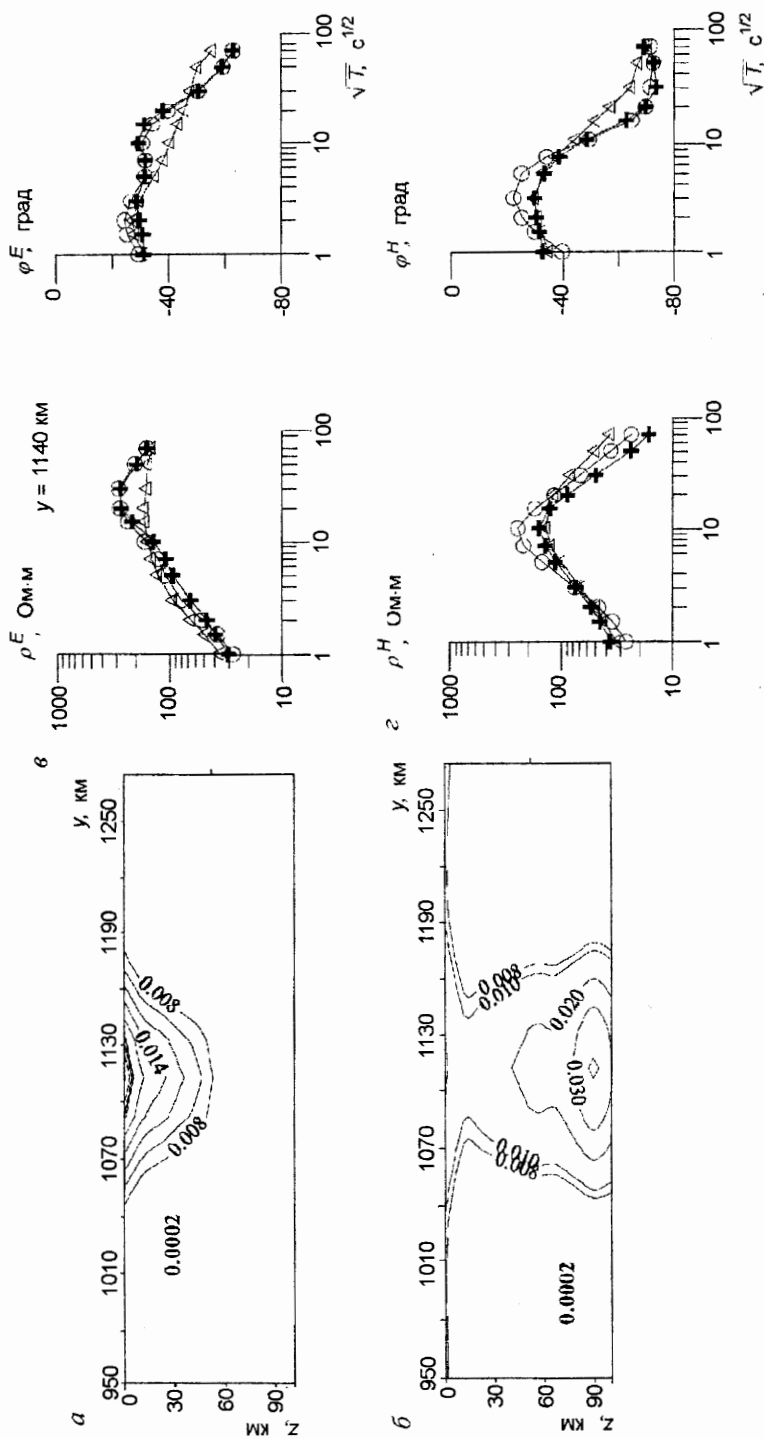


Рис. 4. Модель 2.

a — результат “последовательной” инверсии (верхние 100 км); *б* — результат “средней” инверсии (цифры на изолиниях означают электропроводность, S_m/m); *г*, *д* — амплитудные и фазовые кривые для точки с максимальной невязкой (обозначения те же, что на рис. 2, *в*).

области и непроводящей вмещающей среды.

“Средняя” инверсия модели 2 после 14 итераций достигла $\tilde{S} = 62,9$ и выделила структуру с повышенной электропроводностью (рис. 4, б). Самые большие невязки соответствуют кривым в точках, близким к горизонтальным границам, где предполагается сильная контрастность среды, — инверсия дает “размытые” границы. Связано это с тем, что модель 2 (как и модель 3) не входит в класс функций, для которых создавался алгоритм. Нвязки S_p , далекие от области, где подразумевается резкий скачок электропроводности, имеют значения меньше 10. На глубинах от 80 до 100 км наблюдается фокус аномалии с $\sigma \approx 0,03$ См/м. Вертикальные размеры ее завышены почти в два раза. Горизонтальные — при $z < 50$ км — близки к истинным, при $z > 50$ км тоже завышены.

$E - H - E$ -инверсия после общего числа итераций 61 достигла $\tilde{S} = 23$ (в точках, далеких от границ аномалии $S_p \approx 1$), в целом неплохо определив все параметры (рис. 4, а). Верхний слой с сопротивлением 20 Ом·м выделился недостаточно четко. Очевидно, это связано с тем, что граница для коротких периодов $\sqrt{T} = 1^{0,5}$ не годится для детального определения самой верхней части среды. Для этого необходимо привлекать данные для более коротких периодов. Теоретические и экспериментальные фазовые и амплитудные кривые, представленные для точки с максимальной невязкой, хорошо согласуются друг с другом для “последовательной” инверсии и плохо — для “средней” (рис. 4, в).

Модель 3 является усложненным вариантом модели 2: аномалия состоит из двух частей, каждая имеет длину 10 км, их сопротивление различается в 20 раз. Верхний слой мощностью 700 м над областью, где расположена аномалия, имеет вставку с $\sigma = 0,17$ См/м. Кроме того, используются данные для периодов $\sqrt{T} = 0,1, 0,5c^{0,5}$ (модель 3 — рис. 1, в).

Для модели 3 приводим результаты только последовательной инверсии. Процесс был остановлен на этапе $E - H - E$ -инверсии после общего числа итераций 38 (рис. 5, а). При этом в теоретических и экспериментальных кривых $\rho_T^H, \phi_T^H(\sqrt{T})$ наблюдается неплохое совпадение, в отличие от кривых $\rho_T^E, \phi_T^E(\sqrt{T})$ (рис. 5, б).

Привлечение периодов, меньших 1 с, позволило достаточно детально разрешить строение верхнего проводящего слоя. В пользу этого свидетельствует совпадение на коротких периодах экспериментальных и теоретических фазовых и амплитудных кривых (рис. 5, б). Аномальная область выделилась, но четко разделить ее на две части не удалось. Обе они слились в одну со средним значением электропроводности, границы получились расплывчатыми.

Анализируя все полученные результаты, мы выяснили, что общим для всех рассмотренных моделей является убывание на каждом шаге итераций невязки S вплоть до момента стабилизации, и положительная величина получаемого значения электропроводности независимо ни от выбранного начального приближения, ни от методики проведения бимодальной инверсии. Это свидетельствует об устойчивой работе алгоритма.

Заключение

Проверка алгоритма “средней” бимодальной инверсии на нескольких моделях позволила сделать вывод о том, что эта методика пригодна только для исследования сред с непроводящими структурами.

Методика проведения “последовательной” инверсии проявила себя одинаково хорошо для разных структур — и проводящих и непроводящих. В этом случае инверсия работает наиболее оптимально. Обладая разными разрешающими способностями,

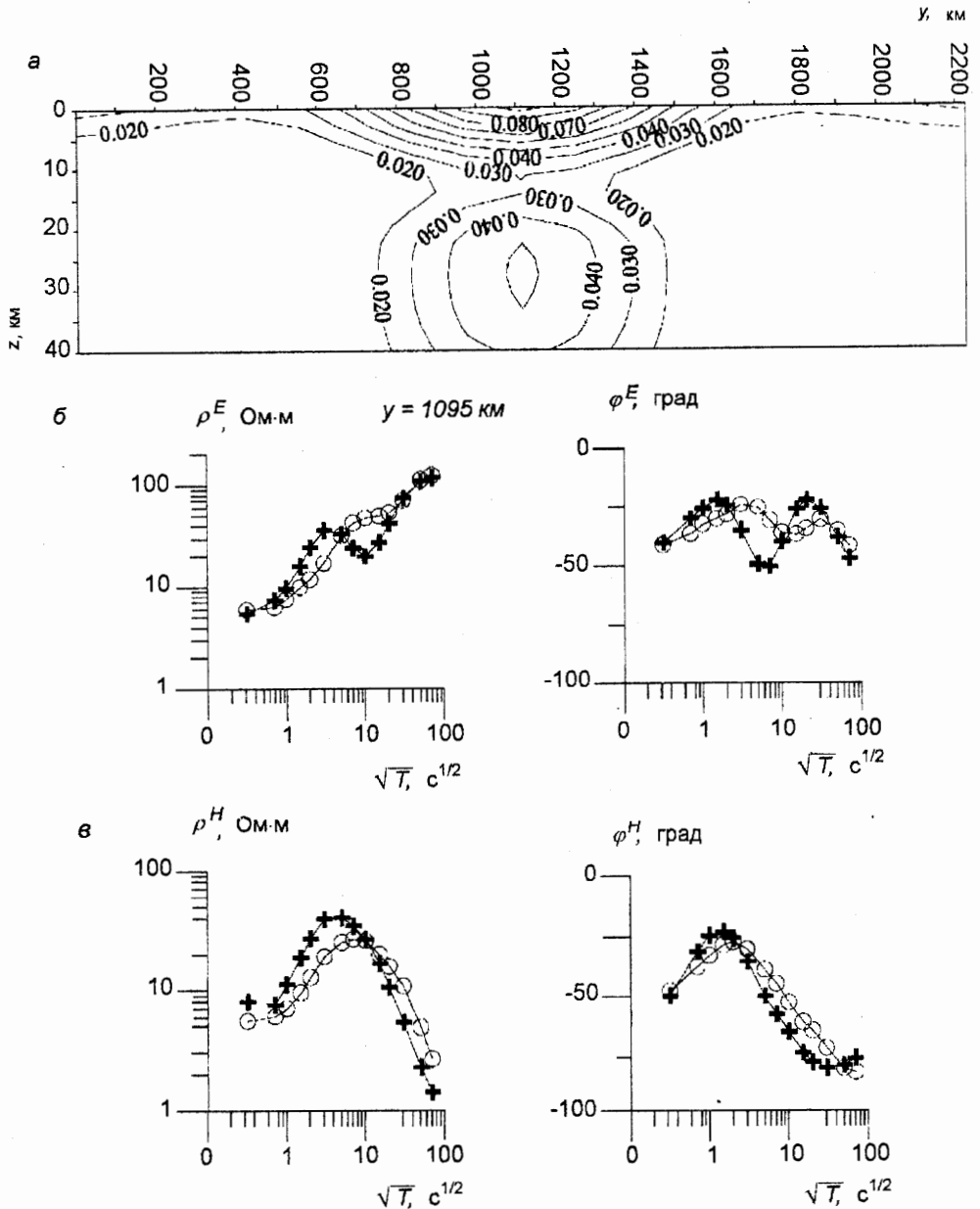


Рис. 5. Модель 3.

Ниже 20,7 км распределение проводимости то же самое, что и для модели 2. а — результат “последовательной” инверсии; б, в — амплитудные и фазовые кривые для точки с максимальной невязкой (обозначения те же, что на рис. 2, в).

ТЕ- и ТМ-моды дают разные решения: ТЕ — “размазывает” аномальную область по горизонтали, ТМ — по вертикали. Всякая последующая инверсия вносит коррективы в решение с учетом всех предыдущих. При этом каждый этап контролируется своей невязкой и за финальный результат следует принимать то решение, которое

стабилизирует невязку текущей инверсии. Как показала практика, количество итераций, которые необходимо провести для выполнения условия (9), зависит главным образом от степени сложности модели.

Указатель литературы

1. Oldenburg D. W., Ellis R. G. Inversion of geophysical data using an approximate inverse mapping // *Geophys. J. Int.* 1991. Vol. 105. P. 325–353.
2. deGroot-Hedlin C., Constable S. Occam's inversion to generate smooth, two-dimensional models from magnetotelluric data // *Geophysics*. 1990. Vol. 55. № 12. P. 1613–1624.
3. Бердичевский М. Н., Дмитриев В. И., Кузнецов В. А. Бимодальная двумерная интерпретация магнитотеллурических зондирований // *Изв. РАН. Физика Земли*. 1995. № 10. С. 3–19.
4. Smith J. T., Booker J. R. Rapid Inversion of Two- and Three-Dimensional Magnetotelluric Data // *J. Geophys. Res.* 1991. Vol. 96. N B3. P. 3905–3922.
5. Порохова Л. Н., Петрова И. М. Алгоритм расчета решения обратной задачи магнитотеллурического зондирования в двумерном приближении // *Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 4 (Физика-Химия)*. 1997. Вып. 4. № 25. С. 31–41.
6. Варданянц И. Л. Использование метода переменных направлений при расчете магнитотеллурического поля методом сеток // V-я Всес. школа-семинар по электромагнитным зондированиям. Мукачево, 1978: Тезисы докладов. Киев, 1978. С. 20.
7. Oldenburg D. W., Ellis R. G. Efficient inversion of magnetotelluric data in two dimensions // *Phys. Earth Planet. Inter.* 1993. № 81. P. 177–200.
8. Ковтун А. А. Строение коры и верхней мантии на северо-западе Восточно-Европейской платформы по данным магнитотеллурических зондирований. Л., 1989.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 98–05–65585.