

Б. В. Киселев, Д. М. Волобуев

РЕКОНСТРУКЦИЯ АТТРАКТОРОВ В ТРЕХМЕРНОМ ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМАГНИТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ

1. Исследование сложных систем зачастую бывает невозможно проводить путем разложения на составные части, анализа этих частей и последующего изучения взаимодействия всех элементов. В таких случаях может оказаться удобным путь построения уравнений движения, основанный на самых общих свойствах системы, которые даются нам из наблюдений или опыта. Такой подход предполагает создание развитого математического аппарата для адекватной обработки имеющейся информации. Одним из первых идею подобного рода обратной задачи разрабатывал Л. И. Гудзенко еще в 1962 г. [1]. Реконструированные уравнения могут не только иметь самостоятельное значение, но и служить в то же время ограничителями класса разрабатываемых прямых моделей, и, таким образом, служить промежуточным звеном при согласовании теоретических моделей с экспериментальными данными, что в целом позволит создать оптимальную модель исследуемого явления. Изложенные в [1] основы метода позволяют находить уравнение автоколебательной системы по ее сигналу. Для системы с одной степенью свободы можно записать: $\dot{x} = y$, $\dot{y} = f(x, \dot{x})$, x — сигнал, $f(x, y)$ — его динамическая характеристика. С учетом флуктуаций: $\dot{y} = f(x, y) + F(x, y, t)$, $\langle F \rangle \equiv 0$, система имеет устойчивое решение (предельный цикл): $x_0(t + T) = x_0 t_0$, $y(t + T) = y_0(t)$. Движение изображающей точки строго по циклу соответствует установившемуся периодическому движению.

В дальнейшем методика [1] была применена к анализу цикличности солнечной активности [2]. Авторы [3, 4] предложили несколько иную методику, в которой функция $f(x, \dot{x})$ представлялась в виде степенного ряда $a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2 + a_5 xy + \dots$. Коэффициенты a_k определялись по методу наименьших квадратов. После нахождения численных значений коэффициентов решалась прямая задача, т. е. строился фазовый портрет. Этот метод использовался при анализе цикличности солнечной активности и при моделировании геомагнитных пульсаций [3–7].

В упомянутых методиках изначально предполагается, что система имеет одну степень свободы, и динамика процесса рассматривается на фазовой плоскости. В этом случае можно определить, представляет ли исследуемый временной ряд автоколебательную систему (имеется ли предельный цикл) или нет.

В работе [8] рассмотрена реконструкция дифференциального уравнения $\dot{x} = f(x(t))$ из его решения в трехмерном случае. В качестве объектов исследования были выбраны тестовые системы уравнения: Ресслера, Лоренца, Дуффинга; функцию $f(x)$ находили следующим образом: полагая $x = (x, y, z)$ и представляя

$$f(x)_k = \sum_{m_1, m_2, m_3} u^{m_1} A_{m_1, m_2, m_3}^k x^{m_1} y^{m_2} z^{m_3} + B_1^k \sin x + C_1^k \cos x + B_2^k \sin y + \dots,$$

определяли коэффициенты из условия

$$\sum_i \{ [x(t_{i+1}) - x(t_i)] / \delta t - f(x(t_i)) \}^2 = \min$$

с точностью около 5 %. Отметим, что здесь для восстановления уравнения необходимо наличие всех трех компонент решения.

В данной работе рассматривается более сложная модель, которая предполагает восстановление аттрактора в трехмерном фазовом пространстве в случае, когда только одна динамическая переменная является наблюдаемой. Разработанная методика основывается на алгоритме из [9].

Учитывая разнообразие колебательных режимов геомагнитных пульсаций, можно ожидать, что особенности возбуждения колебаний отразятся на фазовых портретах. Это позволит определить характер динамики процесса (например, обнаружить странный аттрактор) во времени и от события к событию, а также классифицировать явления в соответствии с простейшими теоретическими конфигурациями.

2. Возможность восстановления динамики (“скрытых переменных”) из скалярного временного ряда следует из математических работ Мане [10] и Такенса [11, 12]. Рассмотрим, например, странный аттрактор фрактальной размерности D , вложенный в минимальное фазовое пространство размерности n ($D \leq n$). Теорема Такенса постулирует, что аттрактор может быть восстановлен в фазовом пространстве размерности $N \geq nt$, где $nt = 2D + 1$. На практике (к примеру, для широко известного аттрактора Лоренца) оказывается, что во многих случаях аттрактор может быть восстановлен и при $N < nt$.

Предположим, что динамика переменной x_1 ($\{x_1^i\}_{i=1}^{N_q}$) (наблюдаемой), которую мы хотели бы реконструировать, задана следующей системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, x_3), \quad \frac{dx_3}{dt} = f_3(x_1, x_2, x_3).$$

Посредством стандартного преобразования вектора поля (f_1, f_2, f_3)

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = f_1(x_1, x_2, x_3), \quad y_3 = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f_1}{\partial x_j} f_j$$

можно получить каноническую систему:

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dx_1}{dt} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = y_3, \quad \frac{dy_3}{dt} = F(x_1, y_2, y_3),$$

где от скалярного временного ряда ($\{x_1^i\}_{i=1}^{N_q}$) мы перешли к векторному $\{y_1^i = x_1^i, y_2^i = \dot{x}_1^i, y_3^i = \ddot{x}_1^i\}_{i=1}^{N_q}$, компоненты которого могут быть получены вычислением производных методом конечных разностей непосредственно из наблюдаемого ряда. Была использована центрированная разностная схема второго порядка.

Аппроксимация функции F может быть проведена различными способами, например при помощи радиальных базисных функций, рациональных функций или полиномов [13]. Авторы работы [9] показали, что, несмотря на то, что функция, как правило, имеет сингулярности, она все же может быть аппроксимирована посредством полиномиальных разложений, поскольку эти сингулярности оказываются псевдосингулярностями (лебеговой меры 0).

Введем обозначение для удобства оперирования с трехмерными полиномами: $y_1^j y_2^u y_3^v = (y_1 y_2 y_3)^p$, где $j, u, v \in 0, 1, 2, \dots$; $p \in 1, 2, \dots$. Тогда полиномиальные функции $\Phi^k = \sum_{n=1}^k A_n^k (y_1 y_2 y_3)$, $k \in (1, \infty)$, где коэффициенты A_n^k можно найти, используя

рекуррентное соотношение, полученное из условия ортогональности (процедура ортогонализации Шмидта), формируют полный базис для всех полиномов, а функция F раскладывается в обобщенные ряды Фурье на семействе этих ортогональных полиномиальных функций:

$$F = \sum_{j=1}^{N_p} c_j \Phi^j, \quad c_j = \frac{(F, \Phi^j)}{(\Phi^j, \Phi^j)} = \frac{\sum_{j=1}^{N_q} y_3^j \Phi^j}{(\Phi^j, \Phi^j)}.$$

Затем можно перейти к полиномиальному спектру $K_j = \sum_{i=j}^{N_p} c_j A_j^i$ разложения

$$F = \sum_{j=1}^{N_p} K_j (y_1, y_2, y_3)^j \text{ по изначально введенным полиномам.}$$

3. Изложенный алгоритм был апробирован [9] на хорошо известных тестовых хаотических системах, таких как системы Лоренца и Ресслера, и для сигналов без

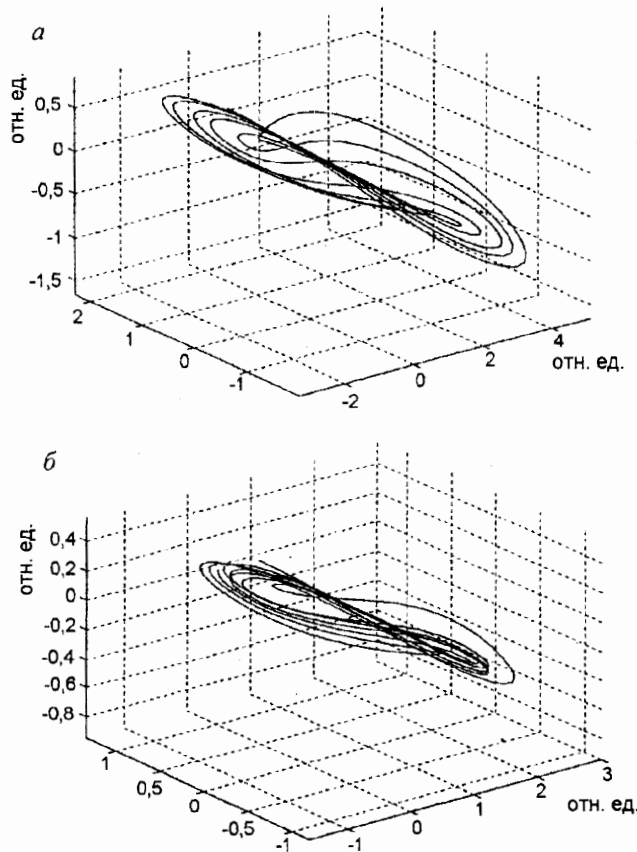


Рис. 1. Фазовый портрет системы уравнений Ресслера.

а — оригинальный сигнал; б — сигнал, восстановленный с помощью реконструированных уравнений при добавлении шума (5 % по амплитуде).

шума оказался вполне устойчивым. Для случая, когда переменная является наблюдаемой в системе Ресслера, коэффициенты можно получить аналитически (функция F является полиномиальной всюду без каких-либо сингулярностей) и решение обратной задачи обеспечивает восстановление коэффициентов уравнения с очень высокой точностью $\approx 0,0006\%$. Однако в общем случае сингулярности существуют и ряд коэффициентов может сходиться медленно с увеличением степени полиномов, используемых для реконструкции. Наше исследование показало, что даже малое добавление шума в тестовую систему приводит к значительному изменению в величине получаемых коэффициентов, но в то же время топология восстановленного аттрактора изменяется медленно.

На рис. 1 показаны: вид траектории системы уравнений Ресслера в трехмерном фазовом пространстве (а) и восстановленная траектория (б) при добавлении шума (5% по амплитуде). Видно, что восстановленная траектория топологически эквивалентна исходной. Методика позволяет проводить расчет траекторий восстановленной системы уравнений при различных начальных условиях. Поэтому можно найти область притяжения (аттрактор) решений реконструированных уравнений для реальных сигналов.

Учитывая, что реконструкция предполагает систему из трех уравнений, для анализируемых случаев пульсаций проводился расчет корреляционной размерности по известному алгоритму [14].

4. Для обработки использовались записи геомагнитных пульсаций типов Pс1, Pс3–Pс5. Было обработано более 50 случаев колебаний различной длительности с шагом оцифровки 8–10 точек на период. В табл. 1 и 2 приведены результаты обработки части случаев, а на рис. 2–5 — наиболее эффектные фазовые портреты. Программа позволяла представлять результаты анализа в виде трехмерного фазового портрета и проекции его на ортогональные плоскости (x, \dot{x}) , (x, \ddot{x}) , (\dot{x}, \ddot{x}) , обозначения по осям в условных единицах, которые выбираются программой из условия, что на фазовой плоскости синусоида — окружность. Как показал опыт расчетов, во многих случаях проекции лучше характеризуют динамику процесса и более наглядны, чем просто трехмерная конфигурация.

Т а б л и ц а 1

Результаты анализа дуга Pс5 по меридиональному профилю 06.04.68 г.

Станция	Компонента	Корреляционная размерность	Конфигурация фазовой траектории
Хейс	H	$\gg 3$ (нет плато)	Расходимость
	D	$2,5 + 0,7$	Сходимость к точке (фокус)
Лопарская	H	$2,6 + 0,4$	Устойчивый тор
	D	$2,8 + 0,1$	Устойчивый тор
Ловозеро	H	$2,5 + 0,5$	Неустойчивый тор
	D	$2,5 + 0,2$	Медленная сходимость к предельному циклу
Кемь	H	$\gg 3$ (нет плато)	Расходимость
	D	$2,4 + 0,3$	Медленная сходимость к предельному циклу

На рис. 2–5 также приведен реальный сигнал и развертка x составляющей реконструированного сигнала при произвольном начальном условии, время и амплитуда указаны в относительных единицах.

Т а б л и ц а 2

Результаты анализа длинного дуга РСЗ (обс. Падун, 21.07.85 г., *H*-компонента)

№	Точки исходного ряда	Корреляционная размерность	Конфигурация фазовой траектории
1	1-600	3,8	Расходимость
2	500-900	2,5	Фокус
3	800-1200	2,8	Тор
4	1100-1500	3,2	Тор
5	1400-1900	3,3	Предельный цикл

5. Анализ обработанных случаев позволил выделить простейшие типы аттракторов: фокус, предельный цикл, хаотический тор, сложное движение в ограниченной области, неустойчивое решение.

В последнем случае, когда решение модельного уравнения неустойчиво (в фазовом пространстве рассчитываемая траектория уходит на бесконечность), можно полагать следующее: а) в сигнале сильна шумовая компонента; б) исследуемый сигнал отражает систему с аттрактором более высокой размерности; в) выбранный для обработки интервал сигнала не отражает динамику явления (неоптимальны длина реализации и шаг оцифровки). Следует подчеркнуть, что достаточно устойчиво фазовый портрет (или решение) восстанавливается для тех сигналов, корреляционная размерность которых меньше трех. Если решение восстановленного уравнения устойчиво при размерности больше трех, это означает, что мы имеем типичный случай детерминированной системы с шумом небольшой амплитуды. Как следует из анализа тестовых примеров, методика расчета сглаживает шум в этих случаях. Реконструкция очевидно корректна в тех случаях, когда отсутствуют самопересечения траектории в трехмерном фазовом пространстве. Результаты расчетов модельных уравнений для различных компонент сигнала на одной точке наблюдения показывают, что в отдельных случаях могут реконструироваться различные типы аттракторов. Например, в *H*-компоненте предельный цикл, а в *D*-компоненте тор или фокус — решение расходится. Анализ одновременных сигналов геомагнитных пульсаций по цепочке обсерваторий также показывает, что решения модельных уравнений могут дать различные типы фазовых портретов даже для пульсаций, зарегистрированных на близко расположенных обсерваториях. Подобный факт можно объяснить, по-видимому, несколькими причинами: неоднородностью пространственного распределения спектральных компонент, различной интенсивностью сигнала и шума в разных компонентах. Все это в конечном счете есть отражение того факта, что наблюдаемая временная последовательность, которую мы обрабатываем, не в полной мере отражает динамику процесса в фазовом пространстве.

Рассмотрим случай пульсаций типа РС5, зарегистрированных 6.04.1968 г. на четырех обсерваториях (табл. 1). Максимум амплитуды колебаний наблюдается в обс. Лопарская ($\Phi = 64^\circ$). Решение модельных уравнений дает конфигурацию фазового портрета в виде тора (рис. 2, а). На близко расположенной обс. Ловозеро ($\Phi = 63^\circ$) характер фазовых портретов несколько другой. Если в обс. Лопарская по обоим компонентам конфигурация фазовой траектории изображает тор, то в обс. Ловозеро тор наблюдается только в *H*-компоненте, которая более интенсивна. В *D*-компоненте мы видим медленную сходимость к предельному циклу. Подобное изменение характера фазовых портретов можно объяснить только пространственными

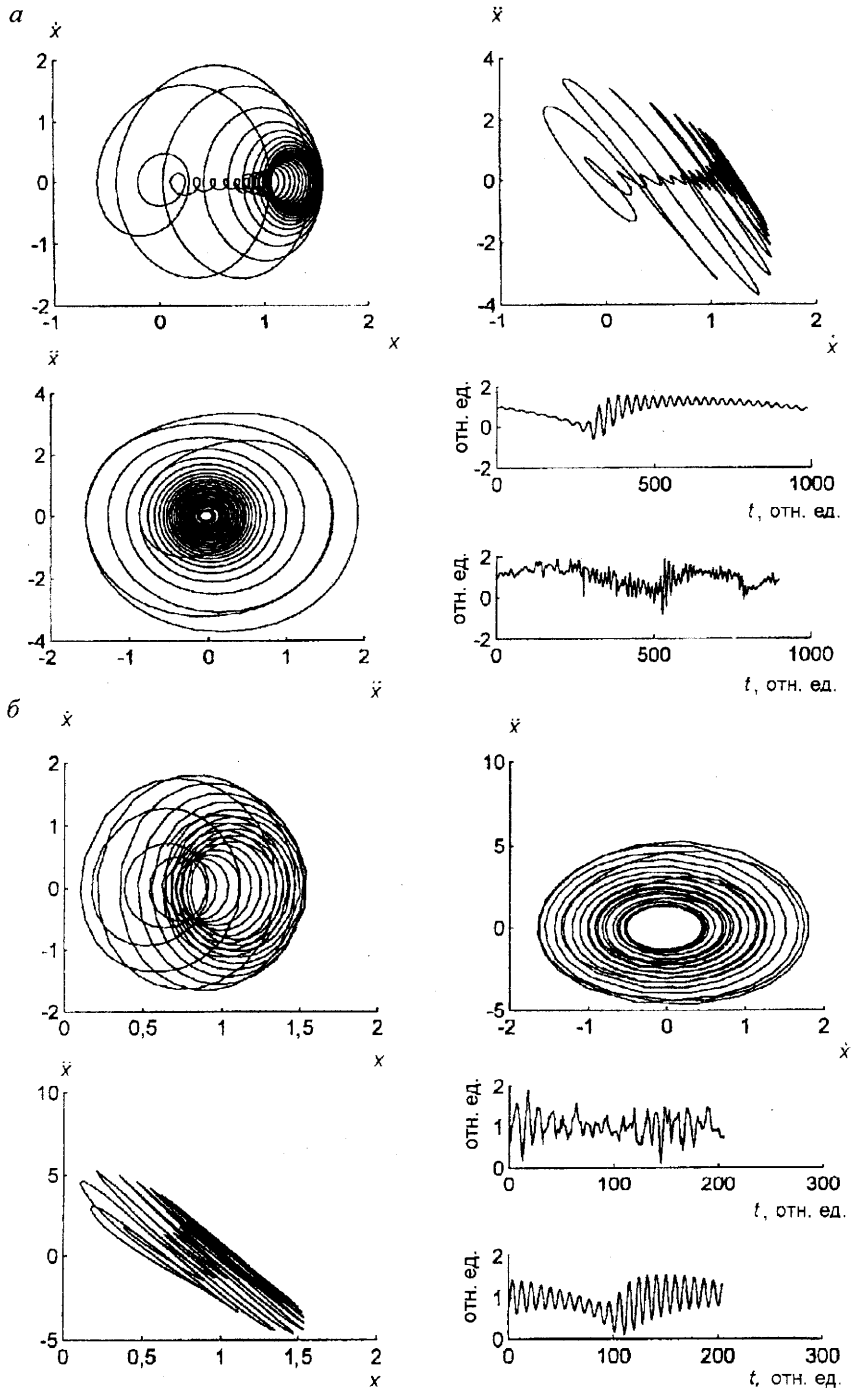


Рис. 2. Проекция решений реконструированного уравнения на ортогональные плоскости.

а — Лопарская, 06.04.68 г., N-компонента. б — Ловозеро, 07.03.72 г., Z-компонента; примеры простейшего аттрактора в виде тора.

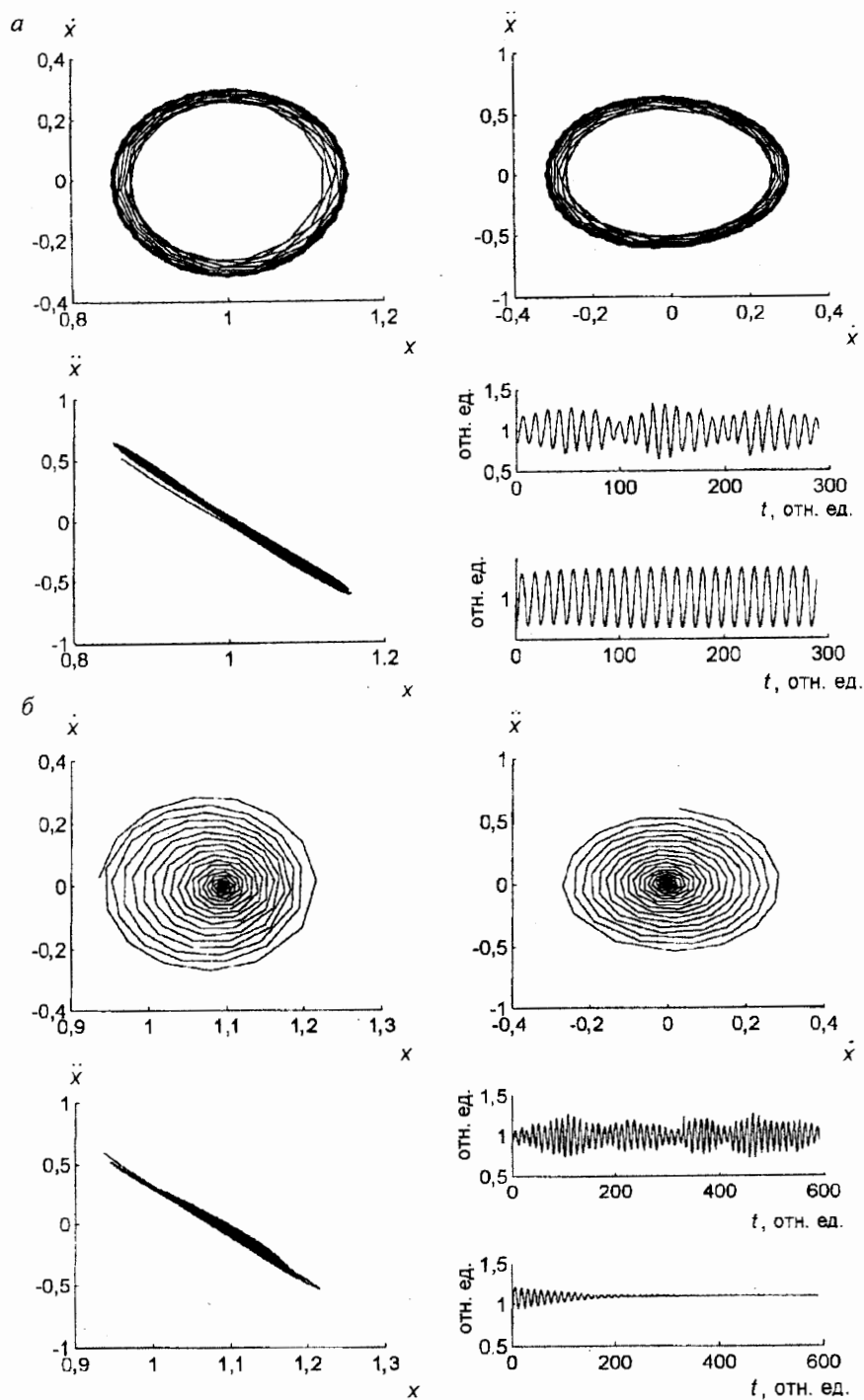


Рис. 3. Проекция решений реконструированного уравнения на ортогональные плоскости для случая пульсаций типа Pc1 (Падун, N-компонента).

a — пример простейшего аттрактора в виде предельного цикла; *b* — пример сходимости решения к фокусу.

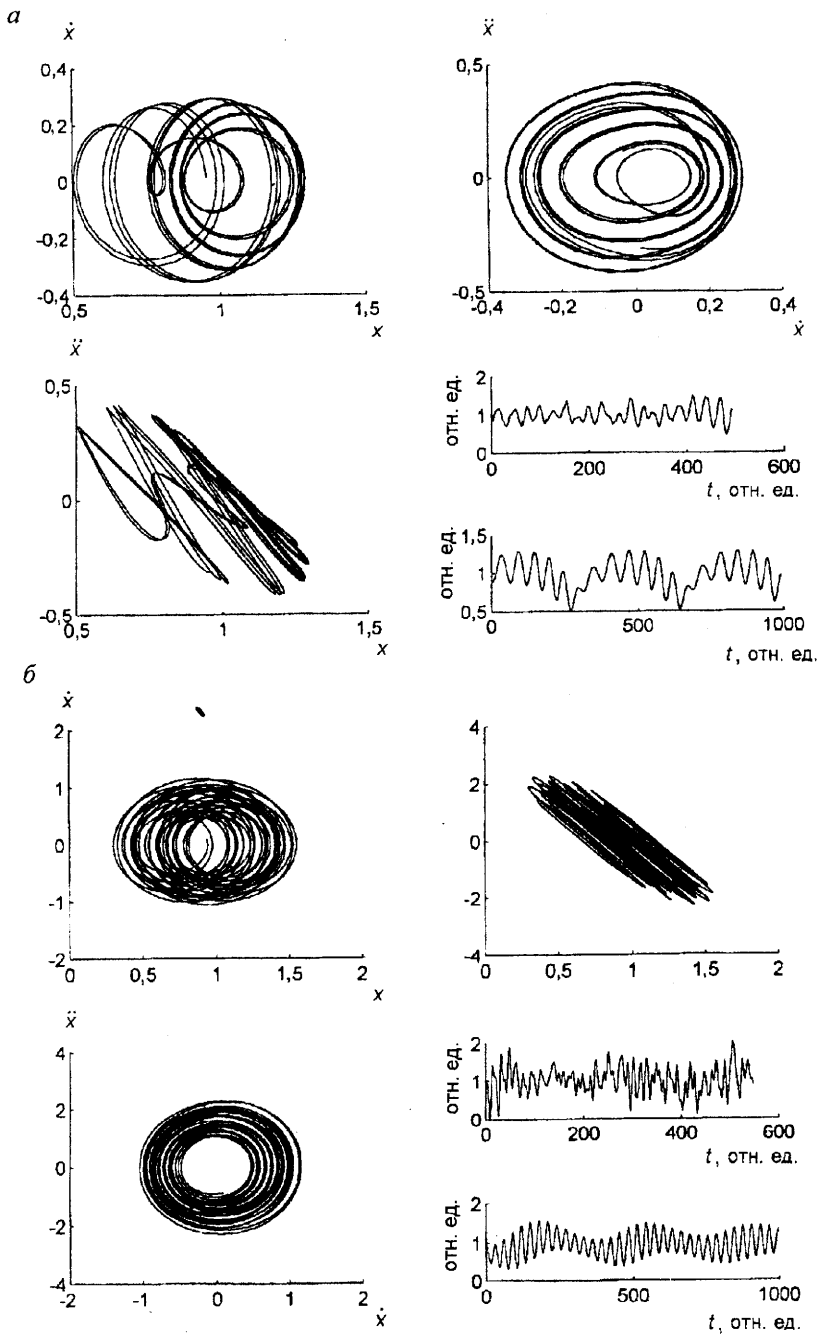


Рис. 4. Проекция решений реконструированного уравнения на ортогональные плоскости для случая пульсаций типа РСЗ (Падун, Н-компонента).

а — пример торообразной конфигурации; б — пример торообразной конфигурации с более сложным режимом модуляции.

градиентами амплитудно-частотных характеристик сигнала. Для пульсаций, зарегистрированных на более удаленных обс. Хейс ($\Phi = 74^\circ$) и Кемь ($\Phi = 60^\circ$), решение модельных уравнений даже расходится. При этом оценка размерности дает величину значительно больше трех, и вид корреляционного интеграла свидетельствует о том, что соотношение регулярной и шумовой составляющих изменилось в пользу шума. На графике корреляционного интеграла невозможно выделить прямолинейный участок. Таким образом, наиболее устойчивое решение реконструированных уравнений проявляется для тех колебаний, интенсивность которых наибольшая, и при этом корреляционная размерность меньше трех. Аналогичные результаты были получены для геомагнитных пульсаций Pc5, зарегистрированных 07.03.72 г. на тех же обсерваториях. На рис. 2, б приведен пример реконструкции фазового портрета для колебаний, зарегистрированных на обс. Ловозеро.

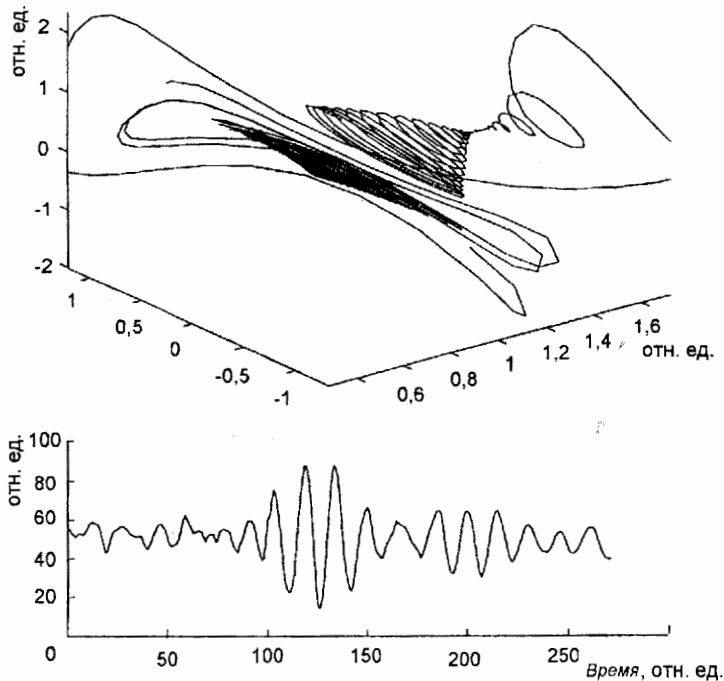


Рис. 5. Трехмерная конфигурация фазового портрета решения реконструированного уравнения при различных начальных условиях для пульсаций типа Pc3, зарегистрированных в обс. Борок 03.03.74 г. (Н-компонента).

Пример скатывания решения от неустойчивого предельного цикла к фокусам.

Анализ длительных серий колебаний типа Pc1 и Pc3 позволил рассмотреть, как меняется характер фазовых портретов со временем. Так, для трех случаев колебаний Pc1 (массив данных состоял из 3–4 тысяч точек, т. е. около 200–300 периодов колебаний) решение модельных уравнений дает предельный цикл при различных выборках длиной от 100 до 500 точек, а также при изменении начальных условий. Типичный пример фазовых портретов Pc1 приведен на рис. 3. Расчет фрактальной размерности дает значения меньше трех, что говорит о корректности проведенной реконструкции. Как известно, пульсации Pc1 — это колебания с хорошо развитой модуляцией. То, что в отличие от пульсаций Pc3, Pc5 реконструкция не дает для

пульсаций $Pc1$ торообразной конфигурации фазового портрета или сложного движения, подобного странному аттрактору, по-видимому, может свидетельствовать о том, что модуляция пульсаций $Pc1$ есть эффект распространения, а не результат генерации.

Для случая колебаний типа $Pc3$, зарегистрированных 21.07.85 г. на obs. Падун (табл. 2), разбиение массива данных на пять интервалов показало изменение решения модельного уравнения от неустойчивого через фокус и тор к предельному циклу. В табл. 2 приведены значения фрактальной размерности. Видно, что выводы, сделанные ранее, подтверждаются. Как пример торообразной конфигурации фазового портрета на рис. 4, а показан результат реконструкции участка записи колебаний (с 800-й по 1200-ю точку оцифрованного ряда), а на рис. 4, б — колебаний с более сложной модуляцией.

Следует подчеркнуть, что конфигурации фазовых портретов, приведенных на рис. 2 и 4 (в особенности на рис. 4, а), подобны конфигурациям, которые были получены экспериментально при изучении движения жидкости между концентрическими вращающимися цилиндрами (течение Тейлора–Куэрта) [15]. Такие конфигурации фазовых портретов качественно подобны конфигурациям, которые находятся при решении системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот результат соответствует периодической или аperiodической модуляции решения и позволяет говорить о механизме Шильникова возникновения хаоса [16].

На рис. 5 показан пример трехмерной конфигурации траекторий в фазовом пространстве, полученных при различных начальных условиях. Анализировался случай пульсаций типа $Pc3$ в виде цуга. Полученная конфигурация аттрактора представляет собой область неустойчивого предельного цикла, из которого траектории сходятся к одному из двух фокусов.

6. В заключение можно сказать, что идея реконструкции уравнений, выдвинутая Л. И. Гудзенко еще в 1962 г. [1], позволяет получить интересные результаты и по-новому взглянуть на развитие геомагнитных пульсаций. Эта идея универсальна в смысле приложения к различным областям исследований и в своей основе использует общие теоретические построения. Полученные в нашей работе результаты, хотя и носят предварительный характер, безусловно говорят о необходимости развития методов реконструкции уравнений по экспериментальным данным. Следует отметить, что методы нелинейного анализа позволяют получать значительно больше информации из экспериментальных данных, чем традиционные спектральные. К настоящему времени информация из экспериментальных временных рядов может быть извлечена следующими способами (по мере возрастания сложности анализа и количества получаемой информации):

— фурье-анализ: определение положения максимума спектра мощности — приближение строгой периодичности;

— обратная задача по Гудзенко: определение жесткости и неизохронности предельного цикла — приближение стабилизирующегося периода;

— реконструкция трехмерного аттрактора: определение фрактальной размерности, показателей Ляпунова и неподвижных точек — приближение плавающего периода.

Проведенное исследование позволяют сделать следующие выводы:

1. Реализована возможность выявления характера аттракторов в экспериментальных временных рядах методом реконструкции уравнений движения динамической системы.

2. Реконструкция корректна в случае отсутствия самопересечений траектории в

восстанавливаемом фазовом пространстве; при наличии самопересечений информация искажается.

3. Геомагнитные пульсации в ряде случаев представляют собой колебания с простейшими аттракторами: фокус, предельный цикл, тор, сложное движение в ограниченной области подобно странному аттрактору.

4. Предлагаемая методика реконструкции уравнений движения динамической системы может оказаться эффективной при изучении динамики и сопоставлении различных геофизических явлений, диагностике работы сложных систем и в любых областях исследований, где необходим анализ временных рядов.

Указатель литературы

1. Гудзенко Л. И. Статистический метод определения характеристик нерегулируемой автоколебательной системы // Изв. вузов. Радиофизика. 1962. Т. 5. № 3. С. 572–586.
2. Гудзенко Л. И., Евстегмеев В. В., Лакоба И. С. и др. Кинетика простых моделей теории колебаний // Труды ФИАН. М.: Наука, 1976. 208 с.
3. Киселев Б. В., Козловский А. Е. Фазовый портрет солнечного цикла (качественное рассмотрение) // Магнитосферные исследования. М.: Наука, 1989. № 13. С. 83–91.
4. Киселев Б. В., Козловский А. Е. Фазовый портрет солнечного цикла (приближение дифференциальным уравнением) // Магнитосферные исследования. М.: Наука, 1989. № 13. С. 92–95.
5. Киселев Б. В., Козловский А. Е. Фазовый портрет геомагнитных пульсаций Pc1 // Магнитосферные исследования. М.: Наука, 1989. № 12. С. 109–114.
6. Киселев Б. В., Козловский А. Е. Квазигармонический характер геомагнитных пульсаций // Геомагнетизм и аэронавигация. 1989. Т. 29. № 5. С. 748.
7. Kiselev B. V., Kozlovskii A. J., Pilipenko V. A. Non-linear distortion of the ULF wave form // Planet. Space Sci. 1991. N 8. P. 1119–1121.
8. Schuster H. Information content of chaotic signals // Phys. Scr. 1989. Vol. 40. P. 367–372.
9. Gouesbet G., Letellier C. Global vector-field reconstruction by using a multivariate L_2 approximation on nets // Phys. Rev. E. 1994. Vol. E 49. N 6. P. 4955–4972.
10. Mane R. On the dimension of the compact invariant sets of certain nonlinear maps // Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer, 1981. Vol. 898. P. 230–242.
11. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence // Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer, 1981. Vol. 898. P. 366–381.
12. Takens F. Distinguishing deterministic and random systems // Nonlinear dynamics and turbulence / Ed. by C. I. Bareublat, G. Iooss, D. D. Joseph. Boston: Pitman, 1983. P. 314–333.
13. Abarbanel H. D. I., Brown R., Sidorovich J. J., Tsimring L. S. The analysis of observed chaotic data in physical systems // Rev. Modern Physics. 1993. Vol. 65. N 4. P. 1331–1392.
14. Crassberg P., Procaccia I. Characterization of strange attractors // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50. P. 346–349.
15. Mullin T., Price T. J. An experimental observation of chaos arising from the interaction of steady and time dependent flows // Nature. 1989. Vol. 340. P. 294–296.
16. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields. New York: Springer, 1986.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 95-05-14751.