А. Д. Чертков

РАЗРЕШИМОСТЬ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ КОСМИЧЕСКОЙ МАГНИТНОЙ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКИ

Разрешимость граничных задач гидродинамики в присутствии магнитных и электрических полей в общем случае не исследована [1, 2]. Даже наличие общего решения системы дифференциальных уравнений не гарантирует разрешимость задачи при неверно сформулированных граничных условиях [1–4]. Кроме этого, возможность или невозможность правильной формулировки граничных условий прямо связана с адекватностью постановки граничной задачи — чрезмерное упрощение модели, используемой в задаче, приводит к необходимости упрощения (вырождения) граничных условий [5, 6]. В свою очередь, это затрагивает исключительно важную проблему правильного описания причинно-следственных цепей в космической физике [7, 8]. Рассмотрение вырожденных случаев (так называемая "идеальная" магнитная гидродинамика) [9, 10] порождает фатальные ошибки при попытке связать вырожденные решения с невырожденными граничными условиями — см. [7, 8]. Для "идеальной" магнитной гидродинамики самым характерным моментом является неоправданное упрощение модели среды за счет исключения электрических полей, полагаемых равными нулю при наличии циркулирующих токов [9, 10]. Эти токи могли бы двигаться по определенным устойчивым траекториям в среде при наличии в ней анизотропной электрической проводимости; однако же уравнение "идеальной" магнитной гидродинамики (уравнение "вмороженности") выводится для полностью изотропной проводимости. Такая модель приводит к неразрешимым парадоксам и противоречиям. В ней вообще нет причинно-следственных связей.

Подчеркивая определяющую роль именно электрических полей в реальных средах и в моделях, претендующих на адекватное описание реалий, модель среды и интерпретационную схему, рассматриваемые в данной статье, следует называть магнитной электрогидродинамикой. Электрические поля, приложенные к проводящей жидкости, вызывают появление токов; токи порождают магнитные поля — таково краткое описание причинно-следственной цепи событий в рамках данной модели.

Таким образом, исследование разрешимости граничных задач и упомянутых проблем, прямо с этим связанных, весьма актуально.

В данной статье рассмотрены проблема существования решений, корректность постановки граничных задач и их разрешимость для космической магнитной электрогидродинамики. В качестве характерного примера рассмотрена точно решаемая задача о магнитных и электрических полях и токах, создаваемых в радиальном потоке плазмы с конечной электропроводностью, текущем между двумя концентрическими сферами, на которых заданы граничные условия. Данная задача предназначена для моделирования солнечного ветра. Наличие точного решения позволяет наглядно продемонстрировать общие принципы на конкретном примере и сделать выводы, касающиеся задач более общего вида.

1. Система уравнений и граничные условия

Уравнения магнитной электрогидродинамики в нестационарном случае при заданной скорости течения вещества таковы:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\,, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0\,, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\,,$$
$$\mathbf{j} = \sigma[\mathbf{E} + (\frac{\mathbf{w}}{c}) \times \mathbf{B}], \tag{1}$$

где $\mathbf{B}$ — магнитная индукция, $\mathbf{j}$ — плотность электрического тока, $\mathbf{E}$ — электрическое поле в системе отсчета, где неподвижны источники поля; $\mathbf{w} = v\mathbf{e}_r - \Omega r \sin\vartheta \mathbf{e}_\varphi$ — скорость плазмы относительно источников поля, $\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\varphi$ — единичные векторы вдоль радиального и азимутального направления, $v = v(r)$ — радиальная скорость солнечного ветра в системе отсчета, где неподвижны звезды, $\Omega = \Omega(r)$ — угловая скорость вращения Солнца относительно плазмы, $\sigma = \sigma(r)$ — электрическая проводимость плазмы. Закон Ома написан в системе отсчета, где неподвижна плазма. Токи смещения и конвекционные токи не учитываются. Решение системы (1) приведено в последующих разделах. Для упрощения изложения сначала будут рассмотрены простые случаи $\Omega = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, после чего будут указаны изменения, появляющиеся в решении при усложнении задачи.

Уравнения магнитной электрогидродинамики в стационарном случае упрощаются:

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \tfrac{4\pi}{c}\sigma[-\operatorname{grad}V + (\tfrac{\mathbf{w}}{c}) \times \mathbf{B}]\,; \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0\,. \tag{2}$$

Здесь V — потенциал в системе отсчета, где неподвижны источники поля. Граничные условия при $r = R_0$ ($R_0 \geq R_\odot$), где $R_\odot$ — радиус Солнца, и $r = R_1$ ($R_1 > R_0$; $R_1 \approx 60R_E^O$), где R_1 — радиус гелиосферы, а R_E^O — радиус орбиты Земли, таковы:

$$\mathbf{B}(R_0,\vartheta,\varphi) = \mathbf{B}_0^b(\vartheta,\varphi)\,,\ \mathbf{E}(R_0,\vartheta,\varphi) = \mathbf{E}_0^b(\vartheta,\varphi),$$
$$\mathbf{B}(R_1,\vartheta,\varphi) = \mathbf{B}_1^b(\vartheta,\varphi)\,,\ \mathbf{E}(R_1,\vartheta,\varphi) = \mathbf{E}_1^b(\vartheta,\varphi), \tag{3}$$

где $\mathbf{B}_0^b, \mathbf{E}_0^b$, $\mathbf{B}_1^b, \mathbf{E}_1^b$ —заданные функции. Они могут быть зависимыми. Граничные условия будут обсуждаться ниже. Мы используем правую сферическую систему координат (r,ϑ,φ). Для задачи о солнечном ветре это – гелиоцентрическая вращающаяся вместе с Солнцем система координат. Соответственно, при $\Omega = 0$ используется гелиоцентрическая система координат, неподвижная относительно звезд.

2. Решение системы уравнений

При условии $\operatorname{grad}\sigma$, $\operatorname{grad}v$, $\operatorname{grad}\Omega \ \parallel \mathbf{e}_r$ решение системы (2) выглядит следующим образом (см. [2–4]):

$$B_r(r,\vartheta,\varphi) = \Re\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} D_{nm}(r)P_{nm}(\cos\vartheta)\exp{(im\varphi)},$$

$$B_\vartheta(r,\vartheta,\varphi) = \Re\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}[\frac{1}{n(n+1)}\frac{d}{d\vartheta}P_{nm}(\cos\vartheta)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r^2 D_{nm}(r) +$$
$$+\tfrac{1}{\sin\vartheta}P_{nm}(\cos\vartheta)imE_{nm}(r)]\exp{(im\varphi)}, \tag{4}$$

$$B_\varphi(r,\vartheta,\varphi) = \Re\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}[\frac{1}{n(n+1)}\frac{1}{\sin\vartheta}P_{nm}(\cos\vartheta)im\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r^2 D_{nm}(r) -$$
$$-\tfrac{d}{d\vartheta}P_{nm}(\cos\vartheta)E_{nm}(r)]\exp{(im\varphi)},$$

$$E_r(r,\vartheta,\varphi)=\Re\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\{\tfrac{\Omega}{c}\tfrac{(-1)}{n(n+1)}\sin\vartheta\tfrac{d}{d\vartheta}P_{nm}(\cos\vartheta)\tfrac{\partial}{\partial r}r^2D_{nm}(r)-$$

$$-P_{nm}(\cos\vartheta)(im\tfrac{\Omega}{c}-\tfrac{c}{4\pi\sigma}\tfrac{n(n+1)}{r^2})rE_{nm}(r)\}\exp(im\varphi),$$

$$E_\vartheta(r,\vartheta,\varphi)=\Re\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\{\tfrac{\Omega}{c}\tfrac{1}{n(n+1)}[n(n+1)\sin\vartheta-$$

$$-m^2\tfrac{1}{\sin\vartheta}]P_{nm}(\cos\vartheta)rD_{nm}(r)+ \qquad (5)$$

$$+\tfrac{d}{d\vartheta}P_{nm}(\cos\vartheta)[\tfrac{c}{4\pi\sigma}\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial r}rE_{nm}(r)-\tfrac{v}{c}E_{nm}(r)]\}\exp(im\varphi),$$

$$E_\varphi(r,\vartheta,\varphi)=\Re\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\{\tfrac{\Omega}{c}\tfrac{(-im)}{n(n+1)}\tfrac{d}{d\vartheta}P_{nm}(\cos\vartheta)rD_{nm}(r)+$$

$$+im\tfrac{1}{\sin\vartheta}P_{nm}(\cos\vartheta)[\tfrac{c}{4\pi\sigma}\tfrac{1}{r}\tfrac{\partial}{\partial r}rE_{nm}(r)-\tfrac{v}{c}E_{nm}(r)]\}\exp(im\varphi),$$

где

$$D_{nm}(r)=G_{nm}^{R}R_{nm}^{1}(r)+G_{nm}^{Q}Q_{nm}^{1}(r), \qquad (6)$$

$$E_{nm}(r)=H_{nm}^{R}R_{nm}^{2}(r)+H_{nm}^{Q}Q_{nm}^{2}(r). \qquad (7)$$

Здесь n, m — целые положительные числа, $G_{nm}^R, H_{nm}^R, G_{nm}^Q, H_{nm}^Q$ — комплексные константы, которые должны быть определены из граничных условий; $P_{nm}(\cos\vartheta)$ — полиномы Лежандра; $R_{nm}^1(r)$, $R_{nm}^2(r)$ — убывающие и $Q_{nm}^1(r)$, $Q_{nm}^2(r)$ — возрастающие с увеличением радиального расстояния линейно независимые решения следующих обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$[\tfrac{d^2}{dr^2}-\tfrac{4\pi\sigma v}{c^2}\tfrac{d}{dr}-\tfrac{n(n+1)}{r^2}+im\Omega\tfrac{4\pi\sigma}{c^2}]r^2R_{nm}^1(r)=0, \qquad (8)$$

$$[\tfrac{d^2}{dr^2}-\tfrac{4\pi\sigma v}{c^2}\tfrac{d}{dr}-\tfrac{n(n+1)}{r^2}+im\Omega\tfrac{4\pi\sigma}{c^2}]r^2Q_{nm}^1(r)=0, \qquad (9)$$

$$[\tfrac{d^2}{dr^2}-(\tfrac{4\pi\sigma v}{c^2}+\tfrac{1}{\sigma}\tfrac{d\sigma}{dr})\tfrac{d}{dr}-\tfrac{n(n+1)}{r^2}+im\Omega\tfrac{4\pi\sigma}{c^2}-\tfrac{dv}{dr}\tfrac{4\pi\sigma}{c^2}]rR_{nm}^2(r)=0, \qquad (10)$$

$$[\tfrac{d^2}{dr^2}-(\tfrac{4\pi\sigma v}{c^2}+\tfrac{1}{\sigma}\tfrac{d\sigma}{dr})\tfrac{d}{dr}-\tfrac{n(n+1)}{r^2}+im\Omega\tfrac{4\pi\sigma}{c^2}-\tfrac{dv}{dr}\tfrac{4\pi\sigma}{c^2}]rQ_{nm}^2(r)=0. \qquad (11)$$

3. Решение граничной задачи

Приведенные в предыдущем разделе общие решения системы уравнений магнитной электрогидродинамики (2) позволяют поставить и решить граничную задачу. Постановка задачи в простейшем случае, когда $\Omega(r)=0$, такова. Решить систему уравнений (2), когда на граничных поверхностях $r=R_0$ и $r=R_1$ заданы радиальные компоненты магнитного и электрического полей: $B_{r0}^b(\vartheta,\varphi)$, $E_{r0}^b(\vartheta,\varphi)$ — на сфере $r=R_0$ и $B_{r1}^b(\vartheta,\varphi)$, $E_{r1}^b(\vartheta,\varphi)$ — на сфере $r=R_1$. Пусть известны коэффициенты разложения этих функций в ряды по сферическим функциям:

$$\begin{aligned}
B_{r0}^b(\vartheta,\varphi)&=\Re\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}C_{nm}^{br0}P_{nm}(\cos\vartheta)\exp(im\varphi),\\
B_{r1}^b(\vartheta,\varphi)&=\Re\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}C_{nm}^{br1}P_{nm}(\cos\vartheta)\exp(im\varphi),\\
E_{r0}^b(\vartheta,\varphi)&=\Re\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}C_{nm}^{er0}P_{nm}(\cos\vartheta)\exp(im\varphi),\\
E_{r1}^b(\vartheta,\varphi)&=\Re\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}C_{nm}^{er1}P_{nm}(\cos\vartheta)\exp(im\varphi),
\end{aligned} \qquad (12)$$

где C^{br0}_{nm}, C^{br1}_{nm}, C^{er0}_{nm}, C^{er1}_{nm} — заданные комплексные константы, которые конкретизируют граничные условия. Сравнивая это разложение с результатом подстановки общего решения (4), (5) в граничные условия (3), видно, что для радиальных компонент магнитного и электрического полей возможно расцепление равенства сумм на сумму равенств отдельно для каждой пары индексов n, m — в силу ортогональности угловых функций $P_{nm}(\cos\vartheta)\exp(im\varphi)$. Но для нерадиальных компонент магнитного поля подобное расцепление в общем случае невозможно из-за того, что в решении (4), (5) угловые функции представляют собою комбинации вида $\frac{d}{d\vartheta}P_{nm}(\cos\vartheta)\exp(im\varphi)$ и $\frac{1}{\sin\vartheta}P_{nm}(\cos\vartheta)\exp(im\varphi)$, которые не раскладываются по функциям $P_{nm}(\cos\vartheta)\exp(im\varphi)$. Итак, для радиальных компонент получаются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\Re C^{br0}_{nm} &= \Re G^R_{nm}R^1_{nm}(R_0) + \Re G^Q_{nm}Q^1_{nm}(R_0),\\
\Re C^{br1}_{nm} &= \Re G^R_{nm}R^1_{nm}(R_1) + \Re G^Q_{nm}Q^1_{nm}(R_1),\\
\Im C^{br0}_{nm} &= \Im G^R_{nm}R^1_{nm}(R_0) + \Im G^Q_{nm}Q^1_{nm}(R_0),\\
\Im C^{br1}_{nm} &= \Im G^R_{nm}R^1_{nm}(R_1) + \Im G^Q_{nm}Q^1_{nm}(R_1),
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\Re C^{er0}_{nm} &= \frac{c}{4\pi\sigma}\frac{n(n+1)}{R_0}[\Re H^R_{nm}R^2_{nm}(R_0) + \Re H^Q_{nm}Q^2_{nm}(R_0)],\\
\Re C^{er1}_{nm} &= \frac{c}{4\pi\sigma}\frac{n(n+1)}{R_1}[\Re H^R_{nm}R^2_{nm}(R_1) + \Re H^Q_{nm}Q^2_{nm}(R_1)],\\
\Im C^{er0}_{nm} &= \frac{c}{4\pi\sigma}\frac{n(n+1)}{R_0}[\Im H^R_{nm}R^2_{nm}(R_0) + \Im H^Q_{nm}Q^2_{nm}(R_0)],\\
\Im C^{er1}_{nm} &= \frac{c}{4\pi\sigma}\frac{n(n+1)}{R_1}[\Im H^R_{nm}R^2_{nm}(R_1) + \Im H^Q_{nm}Q^2_{nm}(R_1)].
\end{aligned} \tag{14}$$

Видно, что системы уравнений (13) и (14) разрешимы при произвольных значениях коэффициентов C^{br0}_{nm}, C^{br1}_{nm}, C^{er0}_{nm}, C^{er1}_{nm}. Это обеспечивается линейной независимостью радиальных функций $R^1_{nm}(r)$, $Q^1_{nm}(r)$, $R^2_{nm}(r)$, $Q^2_{nm}(r)$. При $\Omega = 0$ данные радиальные функции вещественны и системы (13) и (14) расцепляются на четыре подсистемы алгебраических линейных уравнений второго порядка. Определители этих систем

$$\Delta^{RQ1}_{nm} = \begin{vmatrix} R^1_{nm}(R_0) & Q^1_{nm}(R_0) \\ R^1_{nm}(R_1) & Q^1_{nm}(R_1) \end{vmatrix}, \tag{15}$$

$$\Delta^{RQ2}_{nm} = \left(\frac{c}{4\pi\sigma}\right)^2\frac{[n(n+1)]^2}{R_0R_1}\begin{vmatrix} R^2_{nm}(R_0) & Q^2_{nm}(R_0) \\ R^2_{nm}(R_1) & Q^2_{nm}(R_1) \end{vmatrix} \tag{16}$$

не равны нулю или бесконечности в том случае, если электропроводность σ и радиусы R_0 и R_1 конечны и не равны нулю. При невыполнении этих условий задача становится вырожденной. Приведем точные выражения для радиальных функций в самом простом для нашего анализа случае, когда магнитное число Рейнольдса постоянно во всем пространстве:

$$\mathrm{Re}_m = \frac{4\pi\sigma v r}{c^2} = \delta = \mathrm{const}. \tag{17}$$

Согласно работам [2–4], в этом случае радиальные функции имеют вид вещественных степенных функций:

$$
\begin{aligned}
&R^1_{nm}(r) = (r/R_0)^{a^1_n},\ Q^1_{nm}(r) = (r/R_0)^{b^1_n},\\
&R^2_{nm}(r) = (r/R_0)^{a^2_n},\ Q^2_{nm}(r) = (r/R_0)^{b^2_n};
\end{aligned} \tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
&a^1_n = \tfrac{1}{2}\left(\delta - 3 - \sqrt{(\delta+1)^2 + 4n(n+1)}\right),\\
&b^1_n = \tfrac{1}{2}\left(\delta - 3 + \sqrt{(\delta+1)^2 + 4n(n+1)}\right),\\
&a^2_n = \tfrac{1}{2}\left(\delta - 2 - \sqrt{\delta^2 + 4n(n+1)}\right),\\
&b^2_n = \tfrac{1}{2}\left(\delta - 2 + \sqrt{\delta^2 + 4n(n+1)}\right).
\end{aligned} \tag{19}
$$

Для достаточно больших значений $\delta >> 1$ приближенные значения степенных показателей таковы:

$$
a^1_n \approx -2 - \frac{n(n+1)}{\delta+1},\quad a^2_n \approx -1 - \frac{n(n+1)}{\delta},\quad b^1_n \approx \delta,\quad b^2_n \approx \delta. \tag{20}
$$

При $\Omega \neq 0$ радиальные функции для достаточно больших $\delta >> 1$ имеют вид степенных функций (18)–(20), умноженных на $\exp(im\Omega r/v)$ [2–4]. В этом случае система уравнений для вещественных и мнимых частей коэффициентов решения не расцепляется. Приведем эту систему для радиального магнитного поля:

$$
\begin{aligned}
&\Re C^{br0}_{nm} = \Re G^R_{nm}\Re R^1_{nm}(R_0) - \Im G^R_{nm}\Im R^1_{nm}(R_0)+\\
&\quad +\Re G^Q_{nm}\Re Q^1_{nm}(R_0) - \Im G^Q_{nm}\Im Q^1_{nm}(R_0),\\
&\Re C^{br1}_{nm} = \Re G^R_{nm}\Re R^1_{nm}(R_1) - \Im G^R_{nm}\Im R^1_{nm}(R_1)+\\
&\quad +\Re G^Q_{nm}\Re Q^1_{nm}(R_1) - \Im G^Q_{nm}\Im Q^1_{nm}(R_1),\\
&+\Im C^{br0}_{nm} = \Re G^R_{nm}\Im R^1_{nm}(R_0) + \Im G^R_{nm}\Re R^1_{nm}(R_0)+\\
&\quad +\Re G^Q_{nm}\Im Q^1_{nm}(R_0) + \Im G^Q_{nm}\Re Q^1_{nm}(R_0),\\
&\Im C^{br1}_{nm} = \Re G^R_{nm}\Im R^1_{nm}(R_1) + \Im G^R_{nm}\Re R^1_{nm}(R_1)+\\
&\quad +\Re G^Q_{nm}\Im Q^1_{nm}(R_1) + \Im G^Q_{nm}\Re Q^1_{nm}(R_1).
\end{aligned} \tag{21}
$$

Гарантией разрешимости этой системы является линейная независимость радиальных функций, включая их реальные и мнимые части. Очевидно также, что ненулевой детерминант системы обеспечивает непрерывную зависимость решений от начальных данных и, следовательно, корректность постановки задачи по Адамару. После того как коэффициенты G^R_{nm} и G^Q_{nm} найдены из системы (21), их следует подставить в уравнение для $E_r(r,\vartheta,\varphi)$ в формулах (4), (5), где в левой части использовано разложение (12), конкретизирующее граничные условия. Комбинации вида $\sin\vartheta \frac{d}{d\vartheta} P_{nm}(\cos\vartheta)\exp(im\varphi)$ с помощью относительно простых рекуррентных соотношений раскладываются по сферическим функциям вида $P_{nm}(\cos\vartheta)\exp(im\varphi)$, но с другими индексами:

$$\begin{gathered}\sin\vartheta \tfrac{d}{d\vartheta} P_{nm}(\cos\vartheta) = \\ = -P_{n-1,m}(\cos\vartheta)\tfrac{(n+m)(n+1)}{2n+1} + P_{n+1,m}(\cos\vartheta)\tfrac{n(n-m+1)}{2n+1}.\end{gathered} \tag{22}$$

Так как G^R_{nm} и G^Q_{nm} уже известны, то комбинации, содержащие их, просто добавятся к известным заданным коэффициентам, аналогичным тем, которые стоят в левой части (14). Для невырожденной задачи детерминант полученной системы уравнений для H^R_{nm} и H^Q_{nm}, так же как и системы (21), будет не равен нулю в силу линейной независимости радиальных функций, включая их вещественные и мнимые части. Это обеспечит и существование решения и его непрерывную зависимость от граничных данных.

Необходимо отметить, что если в качестве граничных условий для решения задачи были бы выбраны касательные к граничной поверхности компоненты B_ϑ и B_φ, то рекуррентное соотношение (22), связывающее комбинации типа $\frac{1}{\sin\vartheta}P_{nm}(\cos\vartheta)\exp(im\varphi)$ и $\frac{d}{d\vartheta}P_{nm}(\cos\vartheta)\exp(im\varphi)$, не позволило бы расцепить равенства сумм на сумму равенств отдельно для каждой пары индексов n, m при подстановке решения (4), (5) в граничные условия (3). Вместо суммы равенств получилась бы бесконечная рекуррентная цепочка по n для определения всех коэффициентов, входящих в D_{nm} и E_{nm}.

Асимптотические разложения для радиальных функций в более сложных случаях приведены в Приложении.

4. Решение нестационарной задачи

Для системы (1) граничные и начальные условия таковы:

$$\begin{gathered}\mathbf{B}(R_0,\vartheta,\varphi,t) = \mathbf{B}^b_0(\vartheta,\varphi,t),\ \ \mathbf{E}(R_0,\vartheta,\varphi,t) = \mathbf{E}^b_0(\vartheta,\varphi,t),\\ \mathbf{B}(R_1,\vartheta,\varphi,t) = \mathbf{B}^b_1(\vartheta,\varphi,t),\ \ \mathbf{E}(R_1,\vartheta,\varphi,t) = \mathbf{E}^b_1(\vartheta,\varphi,t),\\ \mathbf{B}(r,\vartheta,\varphi,t\le t_0) = \mathbf{B}^i(r,\vartheta,\varphi),\ \ \mathbf{E}(r,\vartheta,\varphi,t\le t_0) = \mathbf{E}^i(r,\vartheta,\varphi),\end{gathered} \tag{23}$$

где $\mathbf{B}^b_0(\vartheta,\varphi,t)$, $\mathbf{E}^b_0(\vartheta,\varphi,t)$, $\mathbf{B}^b_1(\vartheta,\varphi,t)$, $\mathbf{E}^b_1(\vartheta,\varphi,t)$, $\mathbf{B}^i(r,\vartheta,\varphi)$, $\mathbf{E}^i(r,\vartheta,\varphi)$ — заданные функции.

Решение системы (1) дают формулы (4), (5), в которые вместо $D_{nm}(r)$ и $E_{nm}(r)$ следует подставить

$$\begin{gathered}D_{nm}(r,t) = G^R_{nm}R^1_{nm}(r)[1+f^{R1}_{nm}(t)] + G^Q_{nm}Q^1_{nm}(r)[1+f^{Q1}_{nm}(t)]+\\ +\textstyle\sum_{l=0}^{\infty}\{G^i_{nml}S^1_{nml}(r,\Lambda_{nml})\exp(-\Lambda_{nml}t)+\\ +G^{R1}_{nml}S^1_{nml}(r,\Lambda_{nml})\int_0^t\exp[-\Lambda_{nml}(t-\tau)][-\tfrac{\partial}{\partial\tau}f^{R1}_{nm}(\tau)]d\tau+\\ +G^{Q1}_{nml}S^1_{nml}(r,\Lambda_{nml})\int_0^t\exp[-\Lambda_{nml}(t-\tau)][-\tfrac{\partial}{\partial\tau}f^{Q1}_{nm}(\tau)]d\tau\},\end{gathered} \tag{24}$$

$$E_{nm}(r,t) = H_{nm}^R R_{nm}^2(r)[1 + f_{nm}^{R2}(t)] + H_{nm}^Q Q_{nm}^2(r)[1 + f_{nm}^{Q2}(t)] +$$
$$+ \textstyle\sum_{l=0}^{\infty}\{H_{nml}^i S_{nml}^2(r, M_{nml}) \exp(-M_{nml}t) +$$
$$+ H_{nml}^{R2} S_{nml}^2(r, M_{nml}) \int_0^t \exp[-M_{nml}(t-\tau)][-\tfrac{d}{d\tau} f_{nm}^{R2}(\tau)]d\tau +$$
$$+ H_{nml}^{Q2} S_{nml}^2(r, M_{nml}) \int_0^t \exp[-M_{nml}(t-\tau)][-\tfrac{d}{d\tau} f_{nm}^{Q2}(\tau)]d\tau\}. \qquad (25)$$

Функции $S_{nml}^1(r, \Lambda_{nml})$, $S_{nml}^2(r, M_{nml})$ — решения задач на собственные значения, а Λ_{nml} и M_{nml} — соответствующие им собственные значения для следующих задач:

$$[\tfrac{d^2}{dr^2} - \tfrac{4\pi\sigma v}{c^2}\tfrac{d}{dr} - \tfrac{n(n+1)}{r^2} + im\Omega\tfrac{4\pi\sigma}{c^2} + \Lambda_{nml}\tfrac{4\pi\sigma}{c^2}]r^2 S_{nml}^1(r, \Lambda_{nml}) = 0,$$
$$S_{nml}^1(R_0, \Lambda_{nml}) = 0, \quad S_{nml}^1(R_1, \Lambda_{nml}) = 0; \qquad (26)$$

$$[\tfrac{d^2}{dr^2} - (\tfrac{4\pi\sigma v}{c^2} + \tfrac{1}{\sigma}\tfrac{d\sigma}{dr})\tfrac{d}{dr} - \tfrac{n(n+1)}{r^2} + im\Omega\tfrac{4\pi\sigma}{c^2} - \tfrac{4\pi\sigma}{c^2}\tfrac{dv}{dr} +$$
$$+ M_{nml}\tfrac{4\pi\sigma}{c^2}]r S_{nml}^2(r, M_{nml}) = 0, \qquad (27)$$
$$S_{nml}^2(R_0, M_{nml}) = 0, \quad S_{nml}^2(R_1, M_{nml}) = 0,$$

Спектр собственных значений дискретен, если σ, R_0 и R_1 — конечны. Функции $f_{nm}^{R1}(t)$, $f_{nm}^{Q1}(t)$, $f_{nm}^{R2}(t)$, $f_{nm}^{Q2}(t)$ — произвольные функции времени, описывающие заданные изменения граничных условий; при $t \le 0$ все они должны быть равны 0. Коэффициенты G_{nml}^i и H_{nml}^i определяются начальными условиями в пространстве; члены, содержащие их, затухают со временем; они не равны нулю в том случае, если начальные магнитные и электрические поля в пространстве отличаются от статических полей (6), (7); G_{nml}^i — это коэффициенты разложения для радиальной функции такой начальной добавочной части радиальной компоненты магнитного поля в ряд по собственным функциям типа $S_{nml}^1(r, \Lambda_{nml})$, а H_{nml}^i — это коэффициенты разложения для радиальной функции начальной добавочной части радиальной компоненты электрического поля по собственным функциям типа $S_{nml}^2(r, M_{nml})$. Коэффициенты G_{nml}^{R1}, G_{nml}^{Q1}, H_{nml}^{R2}, H_{nml}^{Q2} дают разложение соответствующих (с теми же индексами n, m) радиальных функций статической задачи в ряд по собственным функциям задач на собственные значения — по функциям типа $S_{nml}^1(r, \Lambda_{nml})$ для радиальных статических функций с индексом 1, и по функциям типа $S_{nml}^2(r, M_{nml})$ для радиальных статических функций с индексом 2. Индексы R относятся к убывающим, а Q — к возрастающим функциям.

При $\Omega = 0$ нестационарное решение существенно упрощается. Задачи на собственные значения не зависят от индекса m и становятся чисто вещественными. Но общность решения не уменьшается, так как в этом случае рассмотрение задачи в системе отсчета, где неподвижны звезды, не мешает учитывать вращение Солнца, вводя граничные условия на внутренней сфере как периодические во времени с периодом повторения, равным периоду вращения Солнца вокруг своей оси.

Видно, что главные характерные черты решения, полученного в простом случае $\Omega = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, сохраняются и в более сложных задачах, где учитываются вращение и нестационарность. Это обусловлено применимостью формул (4), (5) во всех рассмотренных случаях. Общая схема последовательного определения коэффициентов в решении (4), (5) также неизменна. Сначала обязательно должны быть найдены все D_{nm} по граничным условиям для B_r, а затем — E_{nm} по граничным условиям для E_r.

5. Анализ вырожденных решений

Решения, полученные в предыдущих разделах, позволяют проанализировать также и ситуации, возникающие в вырожденных случаях. Как и раньше, проводим сначала анализ простых случаев $\Omega = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$.

Необходимо отметить, что при $\sigma \to 0$ электрическое поле и потенциал имеют особенность (расходимость). Это связано с тем, что в процессе вывода формул (4), (5) был использован закон Ома, который не имеет места в вакууме. Переход от проводящей среды к вакууму представляет собой качественный скачок и не может быть непрерывным в общем случае [2, 3].

Предельный переход $\sigma \to \infty$ также весьма важен из-за огромного количества ошибок, с ним связанного (см. [5–10]). Необходимо четко различать две ситуации. Первая — электропроводность большая, но конечная; закон Ома позволяет проследить причинно-следственные цепи и найти распределение токов в пространстве по заданным электрическим полям. Будем обозначать эту ситуацию как $\sigma \to \infty$, или как предельный переход по решениям. Вторая — электропроводность бесконечна; закон Ома недействителен; в соответствующих уравнениях сделан предельный переход и отброшены члены со старшими производными, описывавшие причинно-следственные цепи; действует закон о сохранении магнитного потока через любой контур, проходящий через одни и те же частицы жидкости. Объект, выполняющий этот закон, обладает парадоксальными свойствами. Будем обозначать эту ситуацию как $\sigma = \infty$, или как предельный переход по уравнениям.

При $\sigma \to \infty$ возможно решение, содержащее ненулевые члены вида $G^R_{nm} R^1_{nm}(r)$ и $G^Q_{nm} Q^1_{nm}(r)$. В данном случае эти члены дают почти радиальное магнитное поле. Токи, которые возбуждают это поле, имеют только трансверсальные компоненты и не проходят сквозь поверхности сфер. Эти токи имеют чисто индукционное происхождение и нет никаких проблем с внутренним сопротивлением источника тока. Члены, содержащие $H^R_{nm} R^2_{nm}(r)$ и $H^Q_{nm} Q^2_{nm}(r)$, определяются из системы (14). При $\sigma \to \infty$ они стремятся к бесконечности при любых конечных электрических полях, заданных на граничных поверхностях. Малые изменения этих полей приводят к сколь угодно большим изменениям комбинаций $H^R_{nm} R^2_{nm}(r)$ и $H^Q_{nm} Q^2_{nm}(r)$, которые обусловливают только радиальные токи и только нерадиальные магнитные поля в плазме. То есть задача не обладает непрерывной зависимостью от граничных условий и некорректно поставлена по Адамару. Следовательно, в такой постановке задачи возможно только $H^R_{nm} = 0$, $H^Q_{nm} = 0$. Нужно переформулировать задачу и задавать на граничных поверхностях электрические поля C^{er0}_{nm} и C^{er1}_{nm}, зависящие от $\sigma \to \infty$.

Это можно сделать, задавая в явном виде граничные распределенные источники электрического поля с конечными распределенными сопротивлениями. В этом случае появляется возможность получить в движущейся плазме электрическое поле $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} + (\frac{\mathbf{w}}{c}) \times \mathbf{B}$, пропорциональное $\frac{1}{\sigma}$. Такое поле породит конечные токи в плазме и, соответственно, конечные магнитные поля. Токи будут ограничены величинами токов короткого замыкания $J^{sc0}_{nm} = \frac{\Xi^0_{nm}}{r^0_{nm}}$, $J^{sc1}_{nm} = \frac{\Xi^1_{nm}}{r^1_{nm}}$, где r^0_{nm}, r^1_{nm} — внутренние сопротивления, и Ξ^0_{nm}, Ξ^1_{nm} — электродвижущие силы источников электрического поля. Индексы 0 и 1 относятся к внутренней и внешней границам. Весьма условно эту ситуацию можно описать формулировкой “на границах заданы токи”. Необходимо помнить о том, что задано все-таки электрическое поле, создающее эти токи.

Предельный переход $\sigma = \infty$ — это переход от обычного проводника к сверхпроводнику, и к тому же неизотропному. Он является качественным скачком. Совершенно очевидно, что о разрешимости граничной задачи с произвольными и, что очень важно, различающимися граничными условиями на двух сферах в случае $\sigma = \infty$ не может быть и речи. Формулы (18)–(20) показывают, что второе линейно независимое решение уравнений (8)–(11) не существует при $\sigma = \infty$. Остаются только радиальные функции с $a_n^1 = -2$ и $b_n^1 = -1$. Единственная возможность корректно поставить задачу в такой ситуации — задавать граничные поля только на одной сфере. Пусть это будет внутренняя сфера. При этом на внешней сфере должны получаться какие-то граничные условия. Например, это могут быть вакуумные условия. Тогда, действительно, возможно решение, содержащее ненулевые члены вида $G_{nm}^R R_{nm}^1(r)$. Они дают чисто радиальное магнитное поле. Токи, его определяющие, имеют только трансверсальные компоненты и не проходят сквозь поверхности сфер.

Рассмотрим часть решения, обусловленную $H_{nm}^R R_{nm}^2(r)$. Системы (4), (5) и (14) при $\sigma = \infty$ не позволяют найти никакой связи между источниками радиального электрического поля E_{r0}^b и коэффициентами H_{nm}^R, которые описывают радиальные токи j_r.

Пусть $\mathbf{w} = 0$. Все электрические поля в этом случае равны нулю. Утверждения о том, что“плазма может нести в себе вмороженное магнитное поле”, в реальности неявно основываются на модели с анизотропной проводимостью: при $\sigma = \infty$ внутри такой плазмы может существовать ток, никак не связанный с внешним приложенным электрическим полем, определяемый только условиями в момент создания данной плазмы. Путь прохождения этого тока фиксирован в плазме в момент ее создания с помощью устройства, никак не описываемого в рамках данной модели. Этот ток обязан проходить только внутри плазмы, где $\sigma = \infty$. Включение последовательно в цепь этого тока какого-либо источника с конечным внутренним сопротивлением r_{nm}^0 и ненулевой электродвижущей силой Ξ_{nm}^0 приведет к противоречию в решении из-за отсутствия непрерывной зависимости от граничных данных в такой задаче [1]. Малые изменения r_{nm}^0 или Ξ_{nm}^0 должны были бы привести к изменению тока в сверхпроводнике, что противоречит его основному свойству. Ненулевые компоненты вида $H_{nm}^R R_{nm}^2(r)$ в такой ситуации невозможны. Таким образом, для существования радиального тока на границе эти граничные поверхности должны были бы быть погружены в сверхпроводник с такими же свойствами, как и рассматриваемый в задаче. Эти свойства не определены в рамках схемы $\sigma = \infty$ и остаются произвольными. В этой схеме нет закона для токов, в отличие от схемы $\sigma \to \infty$, в которой распределение токов при заданной электропроводности определяется однозначно, если известны приложенные электрические поля. Ниже мы вернемся к этому.

Теперь рассмотрим случай $\mathbf{w} \neq 0$. Предположим, что $H_{nm}^R \neq 0$. Тогда получается, что в задаче имеются источники электрического поля в неподвижной системе отсчета, никак не связанные с токами, текущими в движущейся плазме. Эти токи, как и при $\mathbf{w} = 0$, зафиксированы в момент создания плазмы и неизменны в ней. Эти же токи определяют и магнитные поля. Создание плазмы и фиксация в ней токов, дополняющих уже существующие, происходит непрерывно. Роль заданного электрического поля $\mathbf{E}$, связанного с $H_{nm}^R \neq 0$, сводится к поддержанию равным нулю поля в движущейся плазме $\mathbf{E_1} = \mathbf{E} + (\frac{\mathbf{w}}{c}) \times \mathbf{B}$. То есть токи в плазме, а следовательно, и магнитное поле в ней, существуют сами по себе. Воздействие источника поля $\mathbf{E}$, подверженное малым изменениям и никак не связанное с $(\frac{\mathbf{w}}{c}) \times \mathbf{B}$, как и в случае $\mathbf{w} = 0$, привело бы к появлению не равного нулю поля $\mathbf{E_1} = \mathbf{E} + (\frac{\mathbf{w}}{c}) \times \mathbf{B}$

в системе отсчета, где покоится сверхпроводник — из-за отсутствия непрерывной зависимости от граничных данных в этой задаче, что приводит к противоречию в рамках модели $\sigma = \infty$. К такому же результату привело бы малое изменение скорости в рамках кинематического приближения или малое изменение внешнего давления в динамических задачах. Как и прежде, для существования тока граничные поверхности должны быть погружены в сверхпроводник с такими же свойствами (не сформулированными в явном виде), как и рассматриваемый в задаче. Получается, что таким движущимся сверхпроводником должно быть заполнено пространство, окружающее сферы, что не предусмотрено постановкой задачи.

Противоречия устраняются только при $H^R_{nm} = 0$. Эти коэффициенты описывают радиальные токи, которые в данной пространственной задаче возбудить нельзя.

Ситуация не меняется и при $R_1 \to \infty$. В этом случае при ненулевом и зависящем от ϑ и φ потенциале на внутренней сфере получался бы точно такой же потенциал на бесконечности, что невозможно [3, 4]. Заметим, что модель с анизотропной электропроводностью при $\sigma = \infty$, в рамках которой могут циркулировать токи без поддержки извне, не описывается уравнением полной "вмороженности", так как в нем отсутствует член, содержащий $\operatorname{grad}\sigma$.

Таким образом, асимптотики по решениям и по уравнениям отличаются. Задача обладает сингулярной возмущенностью для предельного перехода $\sigma = \infty$. Причины этого очень глубокие и требуют тщательного анализа.

Вернемся к формулировке задачи. Электрическое поле $\mathbf{E}$ задано в системе отсчета, где неподвижны источники поля. При $\sigma \to \infty$ это — неподвижная система отсчета. Токи и магнитные поля в ней неподвижны. Токи и магнитные поля в плазме являются реакцией плазмы на внешние источники электрических и магнитных полей и полностью ими определяются. В противоположность этому, при $\sigma = \infty$ токи в плазме, протекающие через ее поверхность, могут быть заданы только с помощью "непрерывно намораживающей токи" машины, не подчиняющейся никаким законам. Создаваемые ею токи не зависят ни от каких внешних полей. Машина такого типа не может быть реализована с помощью известных в физике устройств. По-видимому, она родственна демонам Максвелла. Токи могут быть произвольными в рамках такого подхода. Они, в частности, могут имитировать ситуацию $\sigma \to \infty$. Но при $\sigma = \infty$ токи движутся вместе со сверхпроводником. В такой ситуации электрическое поле в той системе отсчета, где неподвижны звезды и относительно которой движется сверхпроводник, является следствием, а не причиной. Но тогда получается, что в сверхпроводнике векторное произведение $\mathbf{w} \times \mathbf{B}$ равно нулю из-за того, что $\mathbf{w} = 0$ именно в той системе отсчета, где неподвижны источники магнитного поля, т. е. в системе отсчета, где неподвижен сам сверхпроводник. Этот вывод действителен не только в кинематическом приближении, но и в динамических задачах. Заметим, что условие $\mathbf{w} \times \mathbf{B} \neq 0$ при $\sigma = \infty$ составляет фундамент теории "пере-соединения" [9, 10]. Одним из самых парадоксальных свойств объекта в рамках схемы $\sigma = \infty$ является то, что магнитное поле в нем полностью определяется только локальными токами, текущими вокруг данной точки, и не зависит от токов в других частях пространства. Все внешние магнитные поля также экранируются локальными токами при любых изменениях этих полей вне окрестности данной точки. Это — прямое следствие закона сохранения магнитного потока. Модель $\sigma = \infty$ является недоопределенной и не может использоваться в ситуациях, когда токи протекают через граничные поверхности сверхпроводника.

Последовательное соединение обычного проводника (модель $\sigma \to \infty$) и идеального анизотропного сверхпроводника (модель $\sigma = \infty$) не приводит к противоречиям только при равных нулю токах через их контактирующие поверхности. В данных объектах действуют совершенно разные законы для токов, которые несовместимы. Этот вывод справедлив как в кинематических, так и в любых динамических задачах. Модель $\sigma = \infty$ не содержит причинно-следственных связей; токи, создающие локальное магнитное поле, обязаны циркулировать вечно без какой-либо причины вдоль тех путей в веществе, которые были проложены в момент создания сверхпроводника; эти пути образуют бесконечно тонкую сеть, окружающую каждую порцию вещества; сеть фиксирована относительно вещества; скорости носителей заряда также фиксированы относительно вещества; все это дает устойчивую систему токов, создающую магнитное поле в данной точке сверхпроводника; дополнительная бесконечно тонкая сеть путей для носителей заряда, фиксированная в веществе, служит для прохождения токов, экранирующих любые внешние магнитные поля. Таковы свойства модели $\sigma = \infty$.

Приложение

Приведем выражения для компонент электрического тока

$$j_r = \frac{c}{4\pi}\Re\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} n(n+1)\frac{1}{r}E_{nm}(r,t)P_{nm}(\cos\vartheta)\exp(im\varphi),$$

$$j_\vartheta = \frac{c}{4\pi}\Re\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\{[\frac{-im}{n(n+1)}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r^2D_{nm}(r,t)+$$

$$+im\frac{1}{r}D_{nm}(r,t)]\frac{1}{\sin\vartheta}P_{nm}(\cos\vartheta)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rE_{nm}\frac{d}{d\vartheta}P_{nm}(\cos\vartheta)\}\exp(im\varphi), \quad (28)$$

$$j_\varphi = \frac{c}{4\pi}\Re\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\{[\frac{1}{n(n+1)}\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r^2D_{nm}(r,t)-$$

$$-\frac{1}{r}D_{nm}(r,t)]\frac{d}{d\vartheta}P_{nm}(\cos\vartheta)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rE_{nm}\frac{1}{\sin\vartheta}P_{nm}(\cos\vartheta)\}\exp(im\varphi).$$

Пусть магнитное число Рейнольдса $Re_m = \frac{4\pi\sigma v r}{c^2} = \lambda r f(r)$, где $\lambda = const = Re_m(R_E^O)$, $f(r)$ — положительная достаточно гладкая функция. Асимптотические разложения статических радиальных функций при $\lambda >> 1$ с точностью до членов порядка $O(\frac{1}{\lambda^2})$ таковы:

$$R_{nm}^1(r) \approx r^{-2}\exp\{im\int\frac{\Omega}{v}dr + im\frac{1}{\lambda}\int(\frac{\Omega}{v})'\frac{1}{f}dr+$$

$$+\frac{1}{\lambda}[-n(n+1)\int\frac{1}{r^2 f}dr + \frac{1}{2}\int(\frac{f'}{f})'\frac{f'}{f^2}dr + \frac{1}{2}\int\frac{(f')^2}{f^3}dr - m^2\int(\frac{\Omega}{v})^2\frac{1}{v}dr]\},$$

$$Q_{nm}^1(r) \approx r^{-2}\frac{1}{f}\exp\{\lambda\int f dr - im\int\frac{\Omega}{v}dr + im\frac{1}{\lambda}\int[(\frac{\Omega}{v})'\frac{1}{f} - 2\frac{\Omega f'}{vf^2}]dr+ \quad (29)$$

$$+\frac{1}{\lambda}[n(n+1)\int\frac{1}{r^2 f}dr + \frac{1}{2}\int(\frac{f'}{f})'\frac{f'}{f^2}dr + \int(\frac{f'}{f})'\frac{1}{f}dr + m^2\int(\frac{\Omega}{v})^2\frac{1}{f}dr]\},$$

$$R_{nm}^2(r) \approx r^{-1}\frac{1}{v}\exp\{im\int\frac{\Omega}{v}dr + im\frac{1}{\lambda}\int\frac{1}{f}[(\frac{\Omega}{v})' + \frac{\Omega}{v}(2\frac{f'}{f} - \frac{\sigma'}{\sigma} - 2\frac{v'}{v}]dr +$$

$$+\frac{1}{\lambda}[-n(n+1)\int\frac{1}{r^2 f}dr - m^2\int(\frac{\Omega}{v})^2\frac{1}{f}dr +$$

$$+\int\frac{1}{f}[(\frac{f'}{f})^2 - (\frac{v'}{v})' - \frac{\sigma' f'}{\sigma f} - 2\frac{v' f'}{vf} + (\frac{v'}{v})^2]dr]\},$$

$$Q_{nm}^2(r) \approx r^{-1}\frac{\sigma v}{f}\exp\{\lambda\int f dr - im\int\frac{\Omega}{v}dr +$$

$$+im\frac{1}{\lambda}\int\frac{1}{f}[(\frac{\Omega}{v})'+\frac{\sigma'\Omega}{\sigma v}+2\frac{\Omega v'}{v^2}]dr+\frac{1}{\lambda}[n(n+1)\int\frac{1}{r^2 f}dr+m^2\int(\frac{\Omega}{v})^2\frac{1}{f}dr+$$
$$+\int\frac{1}{f}[(\frac{f'}{f})'-(\frac{v'}{v})'-(\frac{\sigma'}{\sigma})'-\frac{\sigma'v'}{\sigma v}-(\frac{v'}{v})^2]dr]\}. \quad (30)$$

При $Re_m << 1$ радиальные функции также допускают простые приближенные представления при произвольнных зависимостях σ, v, Ω от радиуса. Положим $\sigma(r) = \sigma_0(\frac{r}{R_0})^k$. Пусть магнитное число Рейнольдса $Re_m = \frac{4\pi\sigma v r}{c^2} = \mu r f(r)$, где $\mu = const = Re_m(R_0)$, $f(r)$ – положительная достаточно гладкая функция. Асимптотические разложения статических радиальных функций при $\mu << 1$ с точностью до членов порядка $O(\mu^2)$ таковы:

$$\begin{aligned}
&R^1_{nm}(r)\approx r^{-n-2}\exp[-\mu n\int(r^{2n}\int f r^{-2n-1}dr)dr-\\
&-\mu i m\int(r^{2n}\int\tfrac{\Omega f}{v}r^{-2n}dr)dr],\\
&Q^1_{nm}(r)\approx r^{n-1}\exp[-\mu(n+1)\int(r^{-2n-2}\int f r^{2n+1}dr)dr-\\
&-\mu i m\int(r^{-2n-2}\int\tfrac{\Omega f}{v}r^{2n+2}dr)dr],
\end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
&R^2_{nm}(r)\approx r^{-1}r^{\alpha_n}\exp[-\mu\alpha_n\int(r^{-2\alpha_n+k}\int f r^{2\alpha_n-k-1}dr)dr-\\
&-\mu i m\int(r^{-2\alpha_n+k}\int\tfrac{\Omega f}{v}r^{2\alpha_n-k}dr)dr],\\
&Q^2_{nm}(r)\approx r^{-1}r^{\beta_n}\exp[-\mu\beta_n\int(r^{-2\beta_n+k}\int f r^{2\beta_n-k-1}dr)dr-\\
&-\mu i m\int(r^{-2\beta_n+k}\int\tfrac{\Omega f}{v}r^{2\beta_n-k}dr)dr],
\end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_n=\tfrac{1}{2}(k+1-\sqrt{(k+1)^2+4n(n+1)}),\\
&\beta_n=\tfrac{1}{2}(k+1+\sqrt{(k+1)^2+4n(n+1)}).
\end{aligned} \quad (33)$$

Собственные значения и собственные функции задач (26–28) при $l >> 1$ с точностью до членов порядка $O(\frac{1}{l})$ таковы:

$$\begin{aligned}
&\Lambda_{nml}\approx -im\Omega+\frac{\pi^2 l^2}{(\int_{R_0}^{R_1}\sqrt{\frac{4\pi\sigma}{c^2}}dr)^2},\\
&M_{nml}\approx -im\Omega+\frac{\pi^2 l^2}{(\int_{R_0}^{R_1}\sqrt{\frac{4\pi\sigma}{c^2}}dr)^2},\\
&S^1_{nml}(r,\Lambda_{nml})\approx r^{-2}\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\frac{\exp[\frac{1}{2}\int_{R_0}^{r}\frac{4\pi\sigma v}{c^2}dr]}{\sigma^{\frac{1}{4}}(\int_{R_0}^{R_1}\sqrt{\sigma}dr)^{\frac{1}{2}}}\sin(\pi l\frac{\int_{R_0}^{r}\sqrt{\sigma}dr}{\int_{R_0}^{R_1}\sqrt{\sigma}dr}),\\
&S^2_{nml}(r,M_{nml})\approx r^{-1}\frac{c}{\sqrt{2\pi}}\frac{\exp[\frac{1}{2}\int_{R_0}^{r}(\frac{4\pi\sigma v}{c^2}+\frac{\sigma'}{\sigma})dr]}{\sigma^{\frac{1}{4}}(\int_{R_0}^{R_1}\sqrt{\sigma}dr)^{\frac{1}{2}}}\sin(\pi l\frac{\int_{R_0}^{r}\sqrt{\sigma}dr}{\int_{R_0}^{R_1}\sqrt{\sigma}dr}).
\end{aligned} \quad (34)$$

В заключение можно сделать следующие выводы. Разрешимость граничных задач гидродинамики в присутствии магнитных и электрических полей, не исследованая в общем случае, была рассмотрена в данной статье на конкретном примере точно решаемой задачи о магнитных и электрических полях и токах, создаваемых в радиальном потоке плазмы с конечной электропроводностью, текущем между двумя концентрическими сферами, на которых заданы граничные условия. Задача предназначена для моделирования солнечного ветра. Определен тип граничных условий, постановка которых делает задачу однозначно разрешимой. Корректные решения для такой задачи существуют в том случае, если на граничных сферах заданы произвольные радиальное магнитное поле, а также радиальное электрическое поле. Приведены эти решения. Показано, что главные характерные черты решения, полученного в простом случае, сохраняются и в более сложных задачах, где учитываются вращение и нестационарность. Попытки задавать на граничных поверхностях трансверсальные компоненты полей имеют следствием неразрешимость граничных задач в общем случае. Вырожденные ситуации рассмотрены с помощью предельных переходов как в полученных решениях, так и в уравнениях. Показано, что при бесконечной электропроводности существуют только весьма вырожденные решения с нулевым нерадиальным магнитным полем.

При $\sigma \to \infty$ токи и магнитные поля в плазме являются реакцией плазмы на внешние источники электрических и магнитных полей и полностью ими определяются. При $\sigma = \infty$ токи движутся вместе со сверхпроводником. Электрическое поле в той системе отсчета, относительно которой движется сверхпроводник, является следствием, а не причиной. В сверхпроводнике векторное произведение $\mathbf{w} \times \mathbf{B}$ равно нулю из-за того, что $\mathbf{w} = 0$ именно в той системе отсчета, где неподвижны источники магнитного поля, т. е. в системе отсчета, где неподвижен сам сверхпроводник. Этот вывод действителен не только в кинематическом приближении, но и в динамических задачах. Модель $\sigma = \infty$ является недоопределенной и не может использоваться в ситуациях, когда токи протекают через граничные поверхности сверхпроводника. Это исключает принципиальную возможность построить так называемую "вмороженную" МГД систему координат, с помощью которой были "решены" проблемы так называемого магнитного "пере-соединения".

Указатель литературы

1. *Альвен Х.* Космическая плазма. М.: Мир, 1983. 214 с.
2. *Чертков А. Д.* Солнечный ветер и внутреннее строение Солнца. М.: Наука, 1985. 200 с.
3. *Чертков А. Д.* Роль граничных условий в задаче о вытягивании магнитного поля Солнца солнечным ветром //Магнитосферные исследования. 1990. № 14. С. 101–105.
4. *Chertkov A. D.* Magnetic field of the solar wind: a stationary kinematic solution with a finite electric conductivity // Solar Wind Seven, COSPAR Coll. Ser. Vol. 3. Oxford. Pergamon Press. 1992. P. 165–168.
5. *Шерклиф Дж.* Курс магнитной гидродинамики. М.: Мир, 1967. 320 с.
6. *Ватажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А.* Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Наука, 1970. 672 с.
7. *Chertkov A. D.* Formulation of problems in plasma kinetics for solar wind and Sun's interior // Problems of Geospace. Wien. Publ. House Austrian Acad. Sci., 1997. P. 179–186.
8. *Chertkov A. D.* Magnetic field line"re-connection": incorrect terminology or incorrect concept? // Ibid. P. 187-198.
9. *Pudovkin M. I., Semenov V. S.* Magnetic field reconnection theory and the solar wind-magnetosphere interaction: A review // Space Sci. Rev. 1985. Vol. 41. P. 1–89.
10. *Еркаев Н. В.* Результаты исследования МГД-обтекания магнитосферы (обзор) // Геомагнетизм и аэрономия. 1988. Т. 28. № 4. С. 529–541.

Работа частично поддержана грантом Министерства общего и профессионального образования РФ КЦФЕ № 95–0–13.