

Ал. А. Ковтун

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ СЕЙСМИЧЕСКОГО ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В ОБЛАСТИ НИЗКИХ ЧАСТОТ В СЛУЧАЕ ТОНКОСЛОИСТЫХ УПРУГИХ СРЕД С КОНТАКТОМ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ НА ГРАНИЦАХ

Введение

В работах [1,2] на основе полноволнового численного моделирования ранее было проведено исследование резонансных интерференционных явлений, возникающих в упругом слое в случае граничных условий типа контакта проскальзывания. В [1] основное внимание уделялось изучению резонансных сейсмических колебаний в слое (мощности h), возбуждаемых источником, расположенном на большом удалении (H) по вертикали от его границ ($H/h > \lambda/h$). В работе [2] исследовались интерференционные волновые поля, генерируемые источником внутри слоя. Исследования в [1,2] проводились при помощи 2D-вычислений полного волнового поля в осесимметричных слоисто-однородных средах на основе методик, численно реализующих повторные интегральные преобразования типа Фурье и метод «глобальной» матрицы [3, 4]. Используемые в [4] интегральные представления решений для полей смещений являются частным случаем представлений в форме метода Лемба [5]. Для правильной интерпретации результатов численного моделирования, полученных в [1, 2], и дальнейшего изучения интерференционных волновых полей модального типа, возбуждаемых внутри слоя, требуются исследования особенностей подынтегральных функций, которые связаны с полюсами, прежде всего, совпадающими с корнями дисперсионного уравнения соответствующей конкретной задачи.

В настоящей работе рассматриваются эталонные модели сред, использованные в [1, 2], содержащие упругий слой, заключенный между упругими или жидкими полупространствами. На границах слоя и упругого полупространства предполагается контакт типа проскальзывания. На основе обзора известных теоретических исследований в [6–18], а также проведения некоторых дополнительных вычислений с использованием символьной математики (MATLAB) для анализа дисперсионных уравнений рассматриваемых задач делаются заключения об изменениях и особенностях в составе волнового поля, возбуждаемого в упругом слое в области низких сейсмических частот, происходящих при переходе от одной модели среды к другой. Теоретические результаты исследований сопоставляются с данными численного моделирования в указанных моделях сред и используются для интерпретации сейсмических волновых полей.

В цикле работ [7–18] Г. И. Петрашень, Л. А. Молоткова, П. В. Крауклиса и их соавторов для ряда аналогичных моделей сред уже был выполнен большой объем необходимых исследований нестационарных интерференционных явлений, возбуждаемых произвольным точечным источником, и проведен аналитический (качественный) анализ корней дисперсионных уравнений соответствующих задач. При этом большая часть

упомянутых исследований проводилась на основе применения метода контурных интегралов. В статье все результаты этих исследований описываются в форме метода Лемба. Рассмотрение целесообразно начать с наиболее простой модели среды — свободный упругий слой.

Свободный упругий слой. На основе применения метода Лемба эта задача подробно исследовалась в работах [14,15]. В случае свободного слоя дисперсионное уравнение $\Delta_0(\kappa, \zeta) \equiv \det(M_0) = 0$, где матрица системы M_0 4×4 имеет вид

$$M_0 = \begin{pmatrix} 2\mu\zeta\alpha & -\mu g & -2\mu\zeta\alpha & -\mu g \\ \mu g & -2\mu\zeta\beta & \mu g & 2\mu\zeta\beta \\ 2\mu\zeta\alpha e^{-\kappa\alpha} & -\mu g e^{-\kappa\beta} & -2\mu\zeta\alpha e^{\kappa\alpha} & -\mu g e^{\kappa\beta} \\ \mu g e^{-\kappa\alpha} & -2\mu\zeta\beta e^{-\kappa\beta} & \mu g e^{\kappa\alpha} & 2\mu\zeta\beta e^{\kappa\beta} \end{pmatrix},$$

может быть записано в виде

$$\Delta_0(\kappa, \zeta) = \mu^4 [(4\zeta^2\alpha\beta - g^2)^2 e^{\kappa(\alpha+\beta)} + (4\zeta^2\alpha\beta - g^2)^2 e^{-\kappa(\alpha+\beta)} - (4\zeta^2\alpha\beta + g^2)^2 e^{\kappa(-\beta+\alpha)} - (4\zeta^2\alpha\beta + g^2)^2 e^{-\kappa(-\beta+\alpha)} + 32\zeta^2\alpha\beta g^2] = 0. \quad (1)$$

Здесь

$$\alpha = \sqrt{\zeta^2 - \gamma^2}, \quad \beta = \sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad g = 2\zeta^2 - 1, \quad \gamma = v_s/v_p, \quad \kappa = \frac{\omega h}{v_s}, \quad (2)$$

v_p, v_s — скорости продольной и поперечной волн; ω — круговая частота; h — толщина слоя. Методика построения матрицы M_0 в терминах переменных ζ, κ метода Лемба подробно изложена в [5,15,16] и кратко будет описана ниже на примере более сложной модели двухслойной среды. Левую часть уравнения (1) можно разделить на части $\Delta_0 = \Delta_{sim}\Delta_{asi}$, дающие два уравнения:

$$\Delta_{sim}(\kappa, \zeta) \equiv g^2 \sinh(\kappa\beta) \cosh(\kappa\alpha) - 4\zeta^2\alpha\beta \sinh(\kappa\alpha) \cosh(\kappa\beta) = 0, \quad (3)$$

$$\Delta_{asi}(\kappa, \zeta) \equiv g^2 \sinh(\kappa\alpha) \cosh(\kappa\beta) - 4\zeta^2\alpha\beta \sinh(\kappa\beta) \cosh(\kappa\alpha) = 0, \quad (4)$$

отвечающие симметричным и антисимметричным колебаниям.

Исследования, проведенные ранее, как в терминах метода Лемба [15,16], так и на основе метода контурных интегралов [7,10], показывают, что корни дисперсионного уравнения подразделяются на два класса. К корням 1-го класса относится ограниченное число особых корней, для которых при $\kappa \rightarrow 0$ выполняются условия $\kappa\alpha \rightarrow 0$ и $\kappa\beta \rightarrow 0$. Такие корни при $\kappa \rightarrow 0$ находятся (обычно) на конечном расстоянии от начала координат, и им соответствуют колебания, спектр которых начинается с нулевой частоты. Корни 2-го класса при $\kappa \rightarrow 0$ располагаются на бесконечности, и им отвечают колебания, начинающиеся с некоторой граничной частоты (частоты отсечки). Полезно отметить, что на основе соотношений

$$\kappa = kh(-i\eta(k)), \quad kh = \kappa\zeta(\kappa), \quad \zeta(\kappa) = \frac{1}{-i\eta(k)}, \quad (\kappa \equiv \frac{\omega}{v_s}h) \quad (5)$$

устанавливается связь между переменными (η, k) и (ζ, κ) , а также левыми частями дисперсионных уравнений $\Delta(\eta, k) = 0$ и $\Delta(\zeta, \kappa) = 0$, записываемых соответственно в

форме метода контурных интегралов и метода Лемба. В силу соотношений (5) устанавливается взаимно-однозначное соответствие между полными множествами $\{\eta\}$ и $\{\zeta\}$ корней уравнений $\Delta(\eta, k) = 0$ и $\Delta(\zeta, \kappa) = 0$ [16], что позволяет однозначно переносить известные результаты исследования корней в плоскости (η) на основе метода контурных интегралов на плоскость (ζ) в случае их рассмотрения в терминах метода Лемба.

Все множество корней дисперсионного уравнения располагается на плоскости (ζ) симметрично относительно координатных осей, и поэтому достаточно рассматривать их положение в одном квадранте плоскости (ζ) , а именно в четвертом квадранте.

К корням 1-го класса уравнений (3) и (4) в области низких частот относятся корни, отвечающие пластинчатой и изгибной модам [15]. Для нахождения положения точек этих корней на плоскости (ζ) вычислим предельные выражения левых частей уравнений (3) и (4) при $\kappa \rightarrow 0$:

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \Delta_{sim}/\kappa = \beta(g^2 - 4\zeta^2\alpha^2), \quad \lim_{\kappa \rightarrow 0} \Delta_{asi}/\kappa = \alpha(g^2 - 4\zeta^2\beta^2) = \alpha \cdot 1. \quad (6)$$

Из первого предельного выражения в (6) вытекает уравнение $(g^2 - 4\zeta^2\alpha^2) = 0$, которое с учетом равенств (2) дает корни, отвечающие пластинчатой волне. Таким образом, пластинчатая волна является симметричной модой, поскольку полюс $\zeta_p = \pm \frac{1}{2\sqrt{1-\gamma^2}}$ суть корни уравнения, описывающего симметричные колебания. При возрастании $(\kappa > 0)$ корень ζ_p монотонно перемещается вдоль вещественной оси плоскости (ζ) , стремясь при $\kappa \rightarrow \infty$ к корню $\zeta = \zeta_R$ уравнения Рэлея [16]

$$R(\zeta) \equiv g^2(\zeta) - 4\zeta^2\alpha(\zeta)\beta(\zeta) = 0.$$

Относительно корня, отвечающего изгибной волне, при анализе антисимметричного уравнения $\Delta_{asi}(\eta, k) = 0$, записываемого в переменных (η, k) метода контурных интегралов, следует, что при $kh \rightarrow 0$ этот корень выходит из точки $\eta = 0$, и с ростом $(kh > 0)$ он перемещается вдоль мнимой оси плоскости (η) , достигая при $kh \rightarrow \infty$ точки рэлеевского корня η_R . В случае же антисимметричного уравнения (4) (в переменных метода Лемба) оказывается, что при $\kappa \rightarrow 0$ корень изгибной волны выходит из точки $\zeta = \infty$ и при увеличении $(\kappa > 0)$ движется по вещественной оси плоскости (ζ) , подходя при $\kappa \rightarrow \infty$ к точке рэлеевского корня ζ_R со стороны $\zeta > \zeta_R$. Асимптотическое поведение корня, связанного с изгибной волной, можно описать формулой $\zeta^2 \approx \sqrt{\frac{3}{4} \frac{1}{(1-\gamma^2)\kappa^2}}$ [16].

В работе [15] установлено, что корни 2-го класса уравнений (3) и (4), принадлежащие 4-му квадранту плоскости (ζ) , зарождаются при $\kappa = 0$ на бесконечности, где берут свое начало линии l_n^\pm всех неособых корней. Оканчиваются эти линии или в точке $\zeta = 1$ или же уходят вдоль мнимой оси на $-i\infty$. В зависимости от концевых точек линий корней l_n^\pm можно различать две ветви корней $\zeta = \zeta_n(\kappa)$ 2-го класса. Вычисления пределов при $\zeta \rightarrow 0$ левых частей уравнений (3) и (4) дают выражения

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \Delta_{sim} = \cosh(\kappa\alpha) \sinh(\kappa\beta)|_{\zeta=0}, \quad \lim_{\zeta \rightarrow 0} \Delta_{asi} = \sinh(\kappa\alpha) \cosh(\kappa\beta)|_{\zeta=0},$$

из которых следует, что все линии простых корней $\zeta = \zeta_n^\pm$, $n = 1, 2, 3, \dots$ проходят через (существенно особую) точку $\zeta = 0$ при граничных частотах $\kappa = \kappa_n^\pm$ ($\kappa_n^+ = n\pi$,

$\tilde{\kappa}_n^+ = \pi(n - 1/2)/\gamma$ в случае уравнения (3) симметричных колебаний, и $\kappa_n^- = (n - 1/2)\pi$, $\tilde{\kappa}_n^- = n\pi/\gamma$ в случае антисимметричного уравнения (4)). При значениях $\kappa > 0$ на интервале $0 < \zeta < 1$ располагается некоторое множество простых корней $\zeta = \zeta_n$ ($n = 1, 2, \dots$), монотонно возрастающих с ростом κ и стремящихся к точке $\zeta = 1$ при $\kappa \rightarrow \infty$. Другая ветвь корней образуется в результате выхода из комплексной плоскости на отрезок $(0, \gamma)$ вещественной оси линий сопряженных корней и их слияния в точках $\zeta = \hat{\zeta}_m$ на частотах $\kappa = \hat{\kappa}_m > 0$. После слияния при $\kappa > \hat{\kappa}_m$ корни перемещаются к своим предельным точкам $\zeta = 0$ и $\zeta = 1$. В [15] устанавливается, что $\hat{\kappa}_m = \frac{m\pi}{\sqrt{1-\gamma^2}}$ есть

такое значение частоты, при котором корень $\zeta = \hat{\zeta}_m$ уравнения (3) проходит через точку $\zeta = \gamma$ при перемещении в интервал $(\gamma, 1)$. Из множества мод, отвечающих корням 2-го класса, физический смысл следует придавать только тем, которые имеют положительную групповую скорость и соответствуют вещественным корням в интервале $(0, 1)$ [14,15].

Упомянутые пластинчатая и изгибная волны, отвечающие корням 1-го класса, а также нормальные моды, связанные с корнями 2-го класса, распространяются также в упругом слое, окруженном жидкими полупространствами.

Упругий слой между жидкими полупространствами. Эта задача исследовалась в терминах метода контурных интегралов в работе [6] и более детально в [7]. В случае симметричной модели среды (жидкие полупространства одинаковы) матрицу системы для этой задачи можно записать в виде

$$M = \begin{pmatrix} -\alpha_0 & \alpha_1 & \zeta & -\alpha_1 & \zeta & 0 \\ \rho_0 & \mu_1 g_1 & 2\mu_1 \zeta \beta_1 & \mu_1 g_1 & -2\mu_1 \zeta \beta_1 & 0 \\ 0 & 2\mu_1 \zeta \alpha_1 & \mu_1 g_1 & -2\mu_1 \zeta \alpha_1 & \mu_1 g_1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 e^{\kappa \alpha_1} & \zeta e^{\kappa \beta_1} & -\alpha_1 e^{-\kappa \alpha_1} & \zeta e^{-\kappa \beta_1} & \alpha_0 \\ 0 & \mu_1 g_1 e^{\kappa \alpha_1} & 2\mu_1 \zeta \beta_1 e^{\kappa \beta_1} & \mu_1 g_1 e^{-\kappa \alpha_1} & -2\mu_1 \zeta \beta_1 e^{-\kappa \beta_1} & \rho_0 \\ 0 & 2\mu_1 \zeta \alpha_1 e^{\kappa \alpha_1} & \mu_1 g_1 e^{\kappa \beta_1} & -2\mu_1 \zeta \alpha_1 e^{-\kappa \alpha_1} & \mu_1 g_1 e^{-\kappa \beta_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\alpha_0 = \sqrt{\zeta^2 - \gamma_0^2}, \quad \alpha_1 = \sqrt{\zeta^2 - \gamma_1^2}, \quad \beta_1 = \sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad g_1 = 2\zeta^2 - 1, \quad \gamma_0 = v_{s1}/v_{p0}, \quad \gamma_1 = v_{s1}/v_{p1},$$

ρ_0 — плотность жидкости, индекс 0 относится к жидким полупространствам, а 1 — к упругому слою.

Вычисления пределов левой части дисперсионного уравнения $\Delta \equiv \det(M) = 0$ при $\kappa \rightarrow 0$ и $\zeta \rightarrow 0$ дают следующие результаты:

$$\Delta_1 = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \Delta / \kappa = 8\mu_1^3 \delta_1^2 \alpha_1 \beta_1 \alpha_0^2 (4\zeta^2 \alpha_1^2 - g_1^2);$$

$$\Delta_2 = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \Delta = 4\mu_1^2 \gamma_1^2 \sinh(\kappa \beta_1) [2\mu_1 \rho_0 \alpha_0 \alpha_1 g_1 \cosh(\kappa \alpha_1) - (\alpha_1^2 \rho_0^2 + g_1^2 \alpha_0^2) \sinh(\kappa \alpha_1)] |_{\zeta \rightarrow 0}.$$

В низкочастотной области помимо полюсов, связанных с пластинчатой и изгибной модами, добавляется пара корней $\zeta = \pm \gamma_0$. Эти корни отвечают волне, которая на низких частотах регистрируется совместно с полем головной волны [10,11]. Относительно корней 2-го класса отметим только, что они в целом сохраняют характер перемещения, описанный для случая свободного слоя. При соответствующих значениях частоты

отсечки ω_n (κ_n) корни, отвечающие нормальным модам, проходят через точку $\zeta = 0$, однако, в отличие от случая свободного слоя, при $\kappa > \kappa_n > 0$ линии этих корней сходят с вещественной оси и располагаются в комплексной плоскости, что обуславливает затухание распространяющихся в слое волновых мод, связанное с утечкой энергии в примыкающие жидкие полупространства. Выход линий корней на вещественную ось при $\kappa \geq \kappa_n > 0$ возможен только при определенных условиях. В частности, при $\gamma_0^{-1} > 1$ корни перемещаются в интервале $(\gamma_0, 1)$. Другой случай — касание траектории движения корня вещественной оси и связанное с этим образование волны типа Кг (Сг) — рассматривается ниже.

Переходя к средам, состоящим из упругого слоя и примыкающих упругих полупространств, следует отметить, что, как подчеркивалось еще в ранних работах [7,11], поведение корней, описывающих низкочастотные колебания в таких средах, сильно зависит от условий контакта на границах слоя. Рассмотрение подобных моделей сред в случае существования контакта проскальзывания на границе начнем с хорошо изученной двухслойной модели среды.

Упругий слой на упругом полупространстве (контакт с проскальзыванием). Эта задача подробно рассмотрена в работе [10] в терминах метода контурных интегралов. Основное внимание в [10] уделяется изучению поля пластинчатой продольной волны в слое, ее дисперсии и затуханию. В [10,11] обращается внимание на отсутствие корня, связанного с изгибными колебаниями в слое, существующими в двух предшествующих моделях сред.

Рассмотрим кратко методику построения дисперсионного уравнения. Пусть в декартовой системе координат x, z задан упругий слой ($\nu = 1$) ($0 < z < h$), лежащий на упругом полупространстве ($\nu = 2$) ($z > h$). Обозначим через $v_{p\nu}$ $v_{s\nu}$ μ_ν соответственно скорости продольной и поперечной волн и модули сдвига в средах $\nu = 1, 2$, а через φ_ν и ψ_ν — продольный и поперечный потенциалы полей смещений, которые удовлетворяют соответствующим волновым уравнениям для сред $\nu = 1, 2$.

На границе $z = h$ имеет место контакт с проскальзыванием, при котором нормальные составляющие смещения u_z и напряжения t_{zz} непрерывны, а тангенциальное напряжение равно нулю, т. е.

$$u_z^{(1)} = u_z^{(2)}, \quad t_{zz}^{(1)} = t_{zz}^{(2)}, \quad t_{xz}^{(1)} = 0, \quad t_{xz}^{(2)} = 0. \quad (7)$$

Определение потенциалов φ_ν и ψ_ν , $\nu = 1, 2$, смещений сводится к решению волновых уравнений при заданных нулевых начальных и граничных условиях. Решение задачи ищется в виде

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_\nu \\ \psi_\nu \end{array} \right\} = \operatorname{Re} \int_0^\infty \left. \begin{array}{l} \Phi_\nu \\ \Psi_\nu \end{array} \right\} F(\kappa, \zeta) \kappa e^{i\kappa z} d\kappa, \quad \nu = 1, 2, \quad (8)$$

где

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_1 \\ \Psi_1 \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\lambda)} \left. \begin{array}{l} X_1^+ e^{\kappa \bar{z} \alpha_1} + X_1^- e^{-\kappa \bar{z} \alpha_1} \\ Y_1^+ e^{\kappa \bar{z} \beta_1} + Y_1^- e^{-\kappa \bar{z} \beta_1} \end{array} \right\} e^{-\kappa \bar{x} \zeta} d\zeta, \quad (9)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_2 \\ \Psi_2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\lambda)} \left. \begin{array}{l} X_2^- e^{-\kappa(\bar{z}-1)\alpha_2} \\ Y_2^- e^{-\kappa(\bar{z}-1)\beta_2} \end{array} \right\} e^{-\kappa\bar{x}\zeta} d\zeta. \quad (10)$$

Функция $F(\kappa, \zeta)$ определяется зависимостью источника от времени. Подстановка выражений (8)–(10) в граничные условия (7) (в которых компоненты смещений и напряжений выражаются через потенциалы) приводит к системе алгебраических уравнений $MX = Y$ относительно вектора неизвестных функций $X = [X_1^+, Y_1^+, X_1^-, Y_1^-, X_2^-, Y_2^-]^T$. Вектор Y определяется функцией источника в начальных условиях, и её конкретный вид не влияет на дисперсионное уравнение. Матрица системы $M_{6 \times 6}$ имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 2\mu_1\zeta\alpha_1 & -\mu_1g_1 & -2\mu_1\zeta\alpha_1 & -\mu_1g_1 & 0 & 0 \\ \mu_1g_1 & -2\mu_1\zeta\beta_1 & \mu_1g_1 & 2\mu_1\zeta\beta_1 & 0 & 0 \\ -\alpha_1e^{-\kappa\alpha_1} & \zeta e^{-\kappa\beta_1} & \alpha_1e^{\kappa\alpha_1} & \zeta e^{\kappa\beta_1} & \alpha_2 & -\zeta \\ \mu_1g_1e^{-\kappa\alpha_1} & -2\mu_1\zeta\beta_1e^{-\kappa\beta_1} & \mu_1g_1e^{\kappa\alpha_1} & 2\mu_1\zeta\beta_1e^{\kappa\beta_1} & -\mu_2g_2 & 2\mu_2\zeta\alpha_2 \\ -2\mu_1\zeta\alpha_1e^{-\kappa\alpha_1} & \mu_1g_1e^{-\kappa\beta_1} & 2\mu_1\zeta\alpha_1e^{\kappa\alpha_1} & 2\mu_1\zeta\beta_1e^{\kappa\beta_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_2\zeta\alpha_2 & -\mu_2g_2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

В равенствах (8)–(11)

$$\alpha_\nu = \sqrt{\zeta^2 - \gamma_\nu^2}, \quad \beta_\nu = \sqrt{\zeta^2 - \delta_\nu^2}, \quad g_\nu = 2\zeta^2 - \delta_\nu^2, \quad \gamma_\nu = v/v_{p\nu}, \quad \delta_\nu = v/v_{s\nu}, \quad \nu = 1, 2;$$

$$\kappa = \omega h/v, \quad \tau = tv/h, \quad \bar{x} = x/h, \quad \bar{z} = z/v, \quad v = v_{s1}.$$

Для установления положения корней $\zeta = \zeta(\kappa)$ первого класса дисперсионного уравнения $\Delta^{(2)}(\zeta, \kappa) \equiv \det(M) = 0$ при $\kappa \rightarrow 0$ при помощи символьных вычислений находим

$$\Delta_1^{(2)}(\zeta, \kappa) = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \Delta^{(2)}/\kappa = 4\mu_2^2\mu_1^3\delta_1\alpha_1\beta_1(g_1^2 - 4\zeta^2\alpha_1^2)(g_2^2 - 4\zeta^2\alpha_2\beta_2). \quad (12)$$

Из анализа равенства $\Delta_1^{(2)} = 0$ следует, что в области $\kappa \ll 1$ на вещественной оси плоскости (ζ) имеется две пары корней. Первая из них — это корень $\zeta_p = \pm \frac{\delta_1}{2\sqrt{1-\gamma_1^2}}$, отвечающий пластинчатой волне, распространяющейся в слое со скоростью $v_p = 2v_{s1}\sqrt{1-\gamma_1^2}$. Вторая пара — корень ζ_R рэлеевского уравнения $g_2^2 - 4\alpha_2\beta_2\zeta^2 = 0$, связанный с рэлеевской модой, распространяющейся вдоль границы в слое и полупространстве.

Исследования пластинчатой волны в [10] показывают, что она имеет такую же дисперсию, как в случае свободного слоя. Затухание волны с расстоянием в случае волновода ($v_{s1} < v_{p1} < v_{s2} < v_{p2}$) происходит по цилиндрическому закону, и утечка энергии в нижнее полупространство отсутствует. При других соотношениях скоростей в слое и полупространстве пластинчатая волна имеет дополнительное экспоненциальное затухание, связанное с излучением энергии в полупространство.

В [10,11] отмечается, что пластинчатая волна не возникает в слое в случае жесткого контакта на границе с полупространством. Действительно, если рассматривать ту же модель среды, но при граничных условиях жесткого контакта, то матрица системы

$M_{6 \times 6}^{(w)}$ принимает вид

$$\begin{pmatrix} -2\mu_1\zeta\alpha_1 & \mu_1g_1 & 2\mu_1\zeta\alpha_1 & \mu_1g_1 & 0 & 0 \\ \mu_1g_1 & -2\mu_1\zeta\beta_1 & \mu_1g_1 & 2\mu_1\zeta\beta_1 & 0 & 0 \\ \zeta e^{-\kappa\alpha_1} & -\beta_1 e^{-\kappa\beta_1} & \zeta e^{\kappa\alpha_1} & \beta_1 e^{\kappa\beta_1} & -\zeta & \beta_2 \\ -\alpha_1 e^{-\kappa\alpha_1} & \zeta e^{-\kappa\beta_1} & \alpha_1 e^{\kappa\alpha_1} & \zeta e^{\kappa\beta_1} & \alpha_2 & -\zeta \\ -2\mu_1\zeta\alpha_1 e^{-\kappa\alpha_1} & \mu_1g_1 e^{-\kappa\beta_1} & 2\mu_1\zeta\alpha_1 e^{\kappa\alpha_1} & \mu_1g_1 e^{\kappa\beta_1} & 2\mu_2\zeta\alpha_2 & -\mu_2g_2 \\ \mu_1g_1 e^{-\kappa\alpha_1} & -2\mu_1\zeta\beta_1 e^{-\kappa\beta_1} & \mu_1g_1 e^{\kappa\alpha_1} & 2\mu_1\zeta\beta_1 e^{\kappa\beta_1} & -\mu_2g_2 & 2\mu_2\zeta\beta_2 \end{pmatrix},$$

и вычисления пределов определителя $\Delta^{(2w)}(\kappa, \zeta) = \det(M^{(w)})$ при $\kappa \rightarrow 0$ дают

$$\Delta_1^{(2w)} = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \Delta^{(2w)} = 4\mu_1^2 \mu_2^2 \delta_1^4 \alpha_1 \beta_1 (4\zeta^2 \alpha_2 \beta_2 - g_2^2).$$

Из анализа равенства $\Delta_1^{(2w)}(\kappa, \zeta) = 0$ следует, что на вещественной оси в области $\kappa \ll 1$ имеется только корень ζ_R , связанный с рэлеевской модой, а полюс, отвечающий пластинчатой волне, отсутствует.

Множество простых корней 2-го класса $\zeta = \zeta_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ уравнения $\Delta^{(2)}(\zeta, \kappa) = 0$, связанных с нормальными модами, в области $\kappa > 0$ на соответствующих частотах отсечки $\omega = \omega_n$ (или $\kappa = \kappa_n$) проходят через точку $\zeta = 0$ и далее уходят в комплексную область плоскости ζ . Этим корням соответствуют затухающие моды, которые, вообще говоря, только в случае малых значений граничной частоты могут попадать в область низких частот. Вычисления пределов при $\zeta \rightarrow 0$ от левых частей дисперсионных уравнений $\Delta^{(2)} = 0$ и $\Delta^{(2w)} = 0$ дают следующие выражения:

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \Delta^{(2)} &= -4\mu_1^3 g_1^3 \mu_2 g_2 \sinh(\kappa\beta_1) [\mu_1 g_1 \alpha_2 \sinh(\kappa\alpha_1) + \mu_2 g_2 \alpha_1 \cosh(\kappa\alpha_1)]|_{\zeta=0}, \\ \lim_{\zeta \rightarrow 0} \Delta^{(2w)} &= 4\mu_1^2 g_1^2 [\mu_1 g_1 \alpha_2 \sinh(\kappa\alpha_1) + \mu_2 g_2 \alpha_1 \cosh(\kappa\alpha_1)] [\mu_1 g_1 \beta_2 \sinh(\kappa\beta_1) + \\ &+ \mu_2 g_2 \beta_1 \cosh(\kappa\beta_1)]|_{\zeta=0}. \end{aligned}$$

Здесь обращает на себя внимание то, что в случае модели с контактом проскальзывания в окрестности точки $\zeta = 0$ дисперсионное уравнение $\sin \kappa_n \delta_1 = 0$, $\kappa_n \delta_1 = n\pi$ соответствует колебаниям, которые вызываются поперечными волнами, и отличается от такового в случае аналогичной модели с жестким контактом, тогда как уравнения, отвечающие продольным модам, совпадают.

Помимо отмеченных особенностей, рассматриваемая модель примечательна тем, что, как установлено в [13], при определенных условиях в слое могут возбуждаться волны особого типа, названные Кг-волной, имеющие резонансный характер. В работах [13, 18] показано, что при выполнении условия $\sin(\kappa_n \frac{\sqrt{1-\gamma_1^2}}{2}) = 0$ на частоте отсечки $\kappa = \kappa_n = \frac{2\pi n}{\sqrt{1-\gamma_1^2}}$ линия в плоскости (ζ) комплексного корня $\zeta = \zeta(\kappa)$ касается в точке $\zeta = \pm\gamma_1$ вещественной оси. При $\kappa = 0$ эта линия корня выходит из точки пластинчатого корня $\zeta = \zeta_p$. Отрезок траектории корня в окрестности точки касания $\zeta = \pm\gamma_1$ связан с возникновением Кг-волны. Свойства волн типа Кг подробно описаны в работах [2, 13, 18]. Волновой пакет Кг-волны распространяется в слое с групповой скоростью

$V_{gr} = v_{p1} \left(1 - \frac{(1-2\gamma^2)(1-\gamma^2)}{(1-2\gamma^2)^2 + 8\gamma^4(1-\gamma^2)} \right)$, принимающей промежуточное значение между скоростями v_{p1} и v_{s1} [18]. Волны типа Кг могут возбуждаться также в упругом слое, лежащем на жидком полупространстве (например, плавающий лед), в слое, погруженном в жидкость, а также в слое, имеющем контакт проскальзывания на границах с упругими полупространствами (трехслойная среда) [2, 13].

Упругий слой между одинаковыми упругими полупространствами. В случае трехслойной среды с контактом проскальзывания на границах дисперсионное уравнение $\det(M) = 0$ системы определяется матрицей $M_{8 \times 8}$ следующего вида:

$$\begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\zeta & -\alpha_2 & \zeta & \alpha_2 & \zeta & 0 & 0 \\ -\mu_{12}g_1 & -2\mu_{12}\zeta\beta_1 & g_2 & -2\zeta\beta_2 & g_2 & 2\zeta\beta_2 & 0 & 0 \\ -2\mu_{12}\zeta\alpha_1 & -\mu_{12}g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\zeta\alpha_2 & g_2 & 2\zeta\alpha_2 & g_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_2 e^{-\kappa\alpha_2} & \zeta e^{-\kappa\beta_2} & \alpha_2 e^{\kappa\alpha_2} & \zeta e^{\kappa\beta_2} & \alpha_1 & -\zeta \\ 0 & 0 & g_2 e^{-\kappa\alpha_2} & -2\zeta\beta_2 e^{-\kappa\beta_2} & g_2 e^{\kappa\alpha_2} & 2\zeta\beta_2 e^{\kappa\beta_2} & -\mu_{12}g_1 & 2\mu_{12}\zeta\beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_{12}\zeta\alpha_1 & -\mu_{12}g_1 \\ 0 & 0 & -2\zeta\alpha_2 e^{-\kappa\alpha_2} & g_2 e^{-\kappa\beta_2} & 2\zeta\alpha_2 e^{\kappa\alpha_2} & g_2 e^{\kappa\beta_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\alpha_\nu = \sqrt{\zeta^2 - \gamma_\nu^2}, \quad \beta_\nu = \sqrt{\zeta^2 - \delta_\nu^2}, \quad g_\nu = 2\zeta^2 - \delta_\nu^2, \quad \gamma_\nu = v/v_{p\nu}, \quad \delta_\nu = v/v_{s\nu}, \quad \nu = 1, 2;$$

$\mu_{12} = \mu_1/\mu_2$, $v = v_{s2}$; индекс $\nu = 1$ относится к обоим полупространствам, а $\nu = 2$ — к слою.

При вычислении пределов определителя $\Delta^{(3)} \equiv \det(M)$ ($\kappa \rightarrow 0$ и $\zeta \rightarrow 0$) имеем следующие выражения:

$$\Delta_1^{(3_2)} = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \Delta^{(3)} / \kappa = -8\mu_1^3 \delta_1^2 \delta_2^2 \alpha_1 \alpha_2 \beta_2 \mu_2^3 (g_2^2 - 4\zeta^2 \alpha_2^2) (g_1^2 - 4\zeta^2 \alpha_1 \beta_1), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2^{(3_2)} = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \Delta^{(3)} = & -4\mu_1^2 \mu_2^2 g_1^2 g_2^2 \sinh(\kappa\beta_2) [\mu_1^2 g_1^2 \alpha_2^2 \sinh(\kappa\alpha_2) + \\ & + 2\mu_1 \mu_2 g_2 g_1 \alpha_1 \alpha_2 \cosh(\kappa\alpha_2) + \mu_2^2 g_2^2 \alpha_1^2 \sinh(\kappa\alpha_2)] |_{\zeta=0}. \end{aligned} \quad (15)$$

Из предельного уравнения $\Delta_1^{(3_2)}|_{\kappa \rightarrow 0} = 0$ из (14) вытекает наличие корня $\zeta = \pm \frac{\delta_2}{2\sqrt{1-\gamma_2^2}}$ и, следовательно, существование пластинчатой волны. Кроме того, имеется рэлеевский корень, связанный с распространением рэлеевской волны внутри слоя и в обоих полупространствах. Из предельного выражения при $\zeta \rightarrow 0$ для $\Delta_2^{(3_2)}$ в (15), как и в предыдущей модели, выделяется множитель $\sin \kappa_n \delta_2$, связанный с колебаниями (типа стоячей волны), вызываемыми многократно отраженными поперечными волнами в слое.

Как уже отмечалось, в рассматриваемой модели, а также в случае трехслойной модели с различающимися полупространствами, сосредоточенный источник, помещенный внутри слоя, возбуждает волны типа Кг, однако их граничные частоты в реальных средах обычно оказываются высокими, и поэтому эти волны нельзя отнести к низко-частотным.

Упругий слой между различающимися упругими полупространствами. В случае различающихся упругих полупространств изменения в матрице M системы касаются только двух последних столбцов и выражаются в замене при функциях

$$\alpha_\nu = \sqrt{\zeta^2 - \gamma_\nu^2}, \quad \beta_\nu = \sqrt{\zeta^2 - \delta_\nu^2}, \quad g_\nu = 2\zeta^2 - \delta_\nu^2, \quad \gamma_\nu = v/v_{p\nu}, \quad \delta_\nu = v/v_{s\nu},$$

индекса $\nu = 1$ на индекс $\nu = 3$, а также в появлении величины $\mu_{32} = \mu_3/\mu_2$ вместо μ_{12} ; здесь индексы $\nu = 1, 3$ относятся к полупространствам, а $\nu = 2$ — к слою.

Вычисления предельных выражений левой части дисперсионного уравнения $\Delta^{(33)} \equiv \det(M) = 0$ приводят к следующим результатам:

$$\begin{aligned} \Delta_1^{(33)} &= \lim_{\kappa \rightarrow 0} \Delta^{(33)}/\kappa = 4\mu_1\mu_2^3\mu_3\delta_2^2\alpha_2\beta_2(g_2^2 - 4\zeta^2\alpha_2^2) \times \\ &\times [\mu_1\delta_3^2\alpha_3(g_1^2 - 4\zeta^2\alpha_1\beta_1) + \mu_3\delta_1^2\alpha_1(g_3^2 - 4\zeta^2\alpha_3\beta_3)]; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2^{(33)} &= \lim_{\zeta \rightarrow 0} \Delta^{(33)} = -4\mu_1g_1\mu_2^2g_2^2\mu_3g_3 \sinh(\kappa\beta_2) \times [\mu_2g_2\alpha_1(\mu_2g_2\alpha_3 \sinh(\kappa\alpha_2) + \\ &+ \mu_3g_3\alpha_2 \cosh(\kappa\alpha_2)) + \mu_1g_1\alpha_2(\mu_2g_2\alpha_3 \cosh(\kappa\alpha_2) + \mu_3g_3\alpha_2 \sinh(\kappa\alpha_2))] |_{\zeta=0}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из предельного уравнения $\Delta_1^{(33)} = 0$ находим корень, отвечающей пластинчатой волне, а также корни $\zeta = \zeta_R$ «обобщенного» рэлеевского уравнения. Выражение для $\Delta_2^{(33)}$ по-прежнему содержит множитель вида $\sin \kappa_n \delta_2$, отвечающий колебаниям в слое, вызываемыми поперечными волнами, а выражение, связанное с продольными модами, видоизменяется по отношению к подобному сомножителю в (15). Для сопоставления с аналогичной моделью при жестком контакте приводим результат вычисления предела левой части дисперсионного уравнения при $\kappa \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\kappa \rightarrow 0} \Delta^{(33g)} &= 4\mu_2^2\delta_3^4\beta_2\alpha_2[\mu_1^2(4\zeta^2\alpha_1\beta_1 - g_1^2)(\zeta^2 - \alpha_3\beta_3) + \\ &+ \mu_3^2(4\zeta^2\alpha_3\beta_3 - g_3^2)(\zeta^2 - \alpha_1\beta_1) + \mu_1\delta_1^2\mu_3\delta_3^2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_3\beta_3) + 4\mu_1\mu_3\zeta^2(\alpha_1\beta_1 - g_1)(\alpha_3\beta_3 - g_3)], \end{aligned}$$

выражение которого усложняется по сравнению с (17), и видно, что оно не содержит множителя, дающего пластинчатый корень.

Рассмотренные четыре модели среды позволяют проследить характер изменений предельных выражений дисперсионных уравнений при $\kappa \rightarrow 0$ и $\zeta \rightarrow 0$ и их корней в низкочастотной области, а также выявить связанные с этим качественные изменения в составе волнового поля, формируемого в слое. На основе обзора исследований в [6–18] и дополнительных вычислений устанавливается, что из корней 1-го класса низкочастотный корень, связанный с изгибными колебаниями, сохраняется лишь в моделях свободного упругого слоя и упругого слоя между жидкими полупространствами, и только пластинчатый корень существует во всех рассматриваемых моделях с контактом проскальзывания. Однако оба эти корня отсутствуют в моделях слоистых упругих сред с условиями жесткого контакта на границах.

Некоторые из обнаруженных в [1,2,18] особенностей, связанных с поведением корней 2-го класса в рассматриваемых моделях сред, способны вызывать резонансные явления

в волновом поле. Одной из таких особенностей является возможность возбуждения в слое колебаний типа стоячих волн, которые в окрестности точки $\zeta = 0$ описываются простым дисперсионным уравнением $\sin \kappa_n = 0$ и испытывают резонанс на частоте отсечки $\kappa_n \equiv \frac{\omega_n h}{v_n} = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Подобное волновое поле образуется в слое при расположении источника возбуждения на большом удалении по вертикали от его границ и регистрации поля в области относительно малых горизонтальных удалений [1]. В этом случае фронт падающей (продольной) волны является локально плоским, причем на границе с проскальзыванием коэффициенты обмена PS- и SP-волн оказываются аномально большими (в сравнении с случаем жесткого контакта), а коэффициент отражения S-волны близок к 1 в области малых углов падения. Эти факторы обуславливают образование интенсивных колебаний внутри слоя поля поперечных волн, образовавшихся за счет обмена падающей P-волны на S-волну и последующих ее многократных отражений от границ слоя.

Аналогичные резонансные явления могут генерироваться в упругом слое, погруженном в жидкость, а также в пористом флюидонасыщенном слое, зажатом между непористыми упругими полупространствами, на границах которого имеет место скользящий контакт [1]. Отметим, что такой контакт может образоваться за счет существования на границе очень тонкого флюидного пропластка или трещины. Близость характера волнового поля в случае модели упругого слоя между упругими полупространствами (М-1, рис. 1, а) и в случае такого же упругого слоя, окруженного жидкостью (М-2, рис. 1, в), иллюстрируется результатами численного моделирования. (Параметры модели М-1: $v_{p2} = 1.85$ км/с, $v_{s2} = 0.7$ км/с, $\rho_1 = 1.9$ г/см³; $v_{p\nu} = 2.2$ км/с, $v_{s\nu} = 1.1$ км/с, $\rho_\nu = 1.9$ г/см³; $\nu = 1, 3$; параметры модели М-2: $v_{p2} = 1.85$ км/с, $v_{s2} = 0.7$ км/с, $\rho_1 = 1.9$ г/см³; $v_{p\nu} = 1.5$ км/с, $v_{s\nu} = 0$, $\rho_\nu = 1$ г/см³.) На рисунке представлены сейсмограммы горизонтальной компоненты (рис. 1, а, в) волнового поля и соответствующие им частотные спектры (рис. 1, б, г), регистрируемые во внутренних точках слоя на разных глубинах. Источник расположен в верхнем полупространстве на удалении по вертикали до кровли слоя $H = 1080$ м; мощность слоя $h = 20$ м. При вычислениях использовался импульс с доминирующей частотой $f = 40$ Гц. На центральных трассах регистрируются колебания, близкие к монохроматическим, отвечающие двум первым симметричным модам. Изрезанность записи и ослабление интенсивности на крайних трассах обусловлены интерференцией симметричных и антисимметричных колебаний (у которых относительно средней плоскости слоя компоненты поля смещений удовлетворяют равенствам $u_x(z) = u_x(-z)$, $u_z(z) = -u_z(-z)$ и $u_x(z) = -u_x(-z)$, $u_z(z) = u_z(-z)$ соответственно). Пики на кривых амплитудных спектров указывают значения частот отсечки, описываемые формулой $f_n = \frac{nv_n}{2h}$, в которой n принимает нечетные значения в случае симметричных колебаний и четные для антисимметричных.

Другой из уже отмеченных особенностей является возбуждение в слое волн типа Кг. На рис. 2 для случая модели упругого слоя между упругими полупространствами (параметры: $v_{p2} = 1,75$ км/с, $v_{s2} = 0,9$ км/с, $\rho_2 = 1,9$ г/см³ у слоя, $v_{p\nu} = 2,2$ км/с, $v_{s\nu} = 1,1$ км/с, $\rho_\nu = 2,0$ г/см³ у полупространств, $\nu = 1, 3$) приводятся сейсмограммы горизонтальной (рис. 2, а) и вертикальной (рис. 2, б) компонент волнового поля, регистрируемые в точках горизонтального профиля наблюдения, проходящего на глубине $z = 2,5$ м от кровли слоя при мощности слоя $h = 20$ м. Источник возбуждения расположен на срединной плоскости слоя (в точке $x = 0$, $z = 10$ м). При выводе сейсмограмм использовано АРУ. На сейсмограммах наблюдается низкочастотная пластинчатая вол-

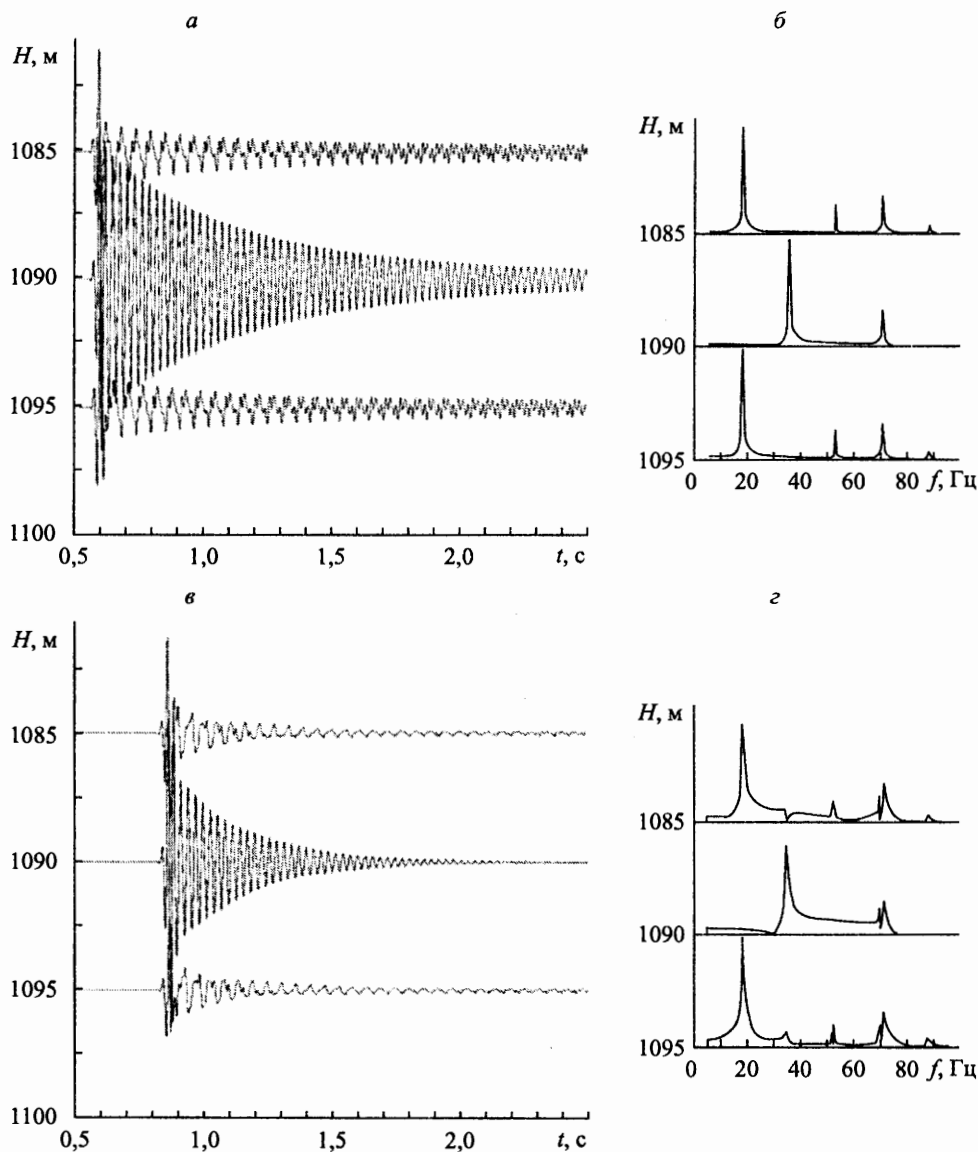


Рис. 1. Сейсмограммы (а, б) и соответствующие им кривые амплитудных спектров (в, г) радиальной компоненты поля вертикального профиля наблюдения в случае моделей М-1 и М-2. Мощность слоя $h = 20$ м; удаление источника по вертикали $H = 1080$ м; горизонтальное удаление профиля наблюдения $r = 600$ м

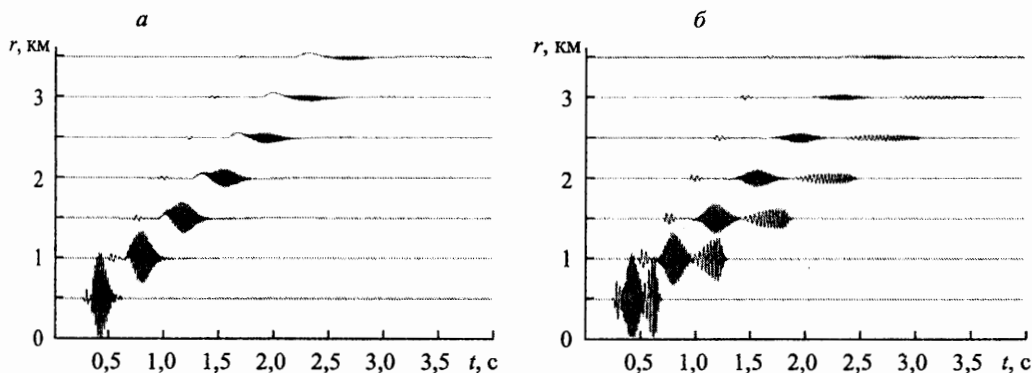


Рис. 2. Сейсмограммы радиальной (а) и вертикальной (б) компонент поля горизонтального профиля наблюдения при использовании АРУ в случае модели М-3.

Глубина точек профиля $d = 2.7$ м; $h = 20$ м; глубина положения источника $z_s = 10$ м

на и следующая за ней значительно более высокочастотная Кг-волна. На сейсмограммах интенсивность поля Кг-волны в ближней зоне больше, чем у пластинчатой волны. Однако затухание пластинчатой волны меньше, чем у Кг-волны.

Указатель литературы

1. Голикова Г. В., Ковтун А. А., Решетников В. В. Численные исследования интерференционных волновых полей в слоистых средах, содержащих границы разделов с контактом проскальзывания // Вопросы геофизики. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2006. Вып. 39. С. 110–115.
2. Ковтун А. А. Численные исследования волновых полей в моделях сред, содержащих границы разделов с контактом проскальзывания // Вопросы геофизики. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2008. Вып. 40. С. 53–59.
3. Schmidt H. OASES Version 3.1. User Guide and Reference Manual // Department of Ocean Engineering Massachusetts Institute of Technology. February 20, 2004.
4. Schmidt H., Jensen F. B. A full wave solution for propagation in multilayered viscoelastic media with application to Gaussian beam reflection at fluid-solid interfaces // J. Acoust. Soc. Am. V. 77. N3. 1985. P. 813–825.
5. Петрашень Г. И. О различных аналитических представлениях решений задач на распространение волн в кусочно-однородных упругих средах с плоскопараллельными границами разделов // Г. И. Петрашень, Л. А. Молотков, П. В. Крауклис. Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах. II. Л.: Наука. 1985. 301 с.
6. Хайкович И. М. Динамическая задача для упругого слоя, погруженного в безграничную жидкую среду // Уч. зап. ЛГУ, 1954. № 177.
7. Молотков Л. А. О распространении низкочастотных колебаний в жидких полупространствах, разделенных упругим слоем // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Изд-во ЛГУ. 1961. Вып. V. С. 281–302.
8. Молотков Л. А. О распространении упругих волн в средах, содержащих тонкие плоскопараллельные слои // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Изд-во ЛГУ. 1961. С. 240–280.
9. Молотков Л. А., Крауклис П. В. Об образовании низкочастотной головной волны в тонких слоях // Геоф. сер. ИАН, 1963. № 6.

10. Крауклис П. В., Молотков Л. А. О низкочастотных колебаниях пластины на упругом полупространстве // ПММ. 1963. Вып. 5. С. 947–951.
11. Петрашень Г. И., Крауклис П. В., Молотков Л. А. О некоторых вопросах теории распространения интерференционных волн в слоистых средах: Первая всесоюзная школа-семинар по дифракции и распространению волн. г. Палаंगा, 1968. С. 211–241.
12. Молотков Л. А., Смирнова Н. С. К вопросу о колебаниях тонкого упругого слоя, заключенного между двумя упругими полупространствами // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Наука, 1970. Вып. 10. С. 21–42.
13. Крауклис П. В., Крауклис Л. А. Об одном типе волн в средах, содержащих поверхности ослабленного механического контакта // Математические вопросы теории распространения волн: Записки научных семинаров ЛОМИ, 1988. Т. 173. С. 113–122.
14. Петрашень Г. И. Нестационарная задача для упругого слоя и парадокс с отрицательной групповой скоростью мод, входящих в ее решение // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л.: Наука, 1990. Вып. 30. С. 28–60.
15. Петрашень Г. В., Пивоваров В. С. Нестационарные интерференционные волновые поля типа SV в свободном слое и проблема ультразвукового моделирования плоских сейсмических полей на пластинчатых моделях // Интерференционные волны в слоистых средах: Записки научных семинаров ПОМИ, 1996. Т. 225. С. 121–239.
16. Петрашень Г. И., Решетников В. В. Разработка инженерных подходов к изучению интерференционных волновых полей, возбуждающихся в пачках тонких упругих слоев. (I). (Возбуждение волновых полей типа SV и обсуждение рациональных методов их количественной оценки.) // Интерференционные волны в слоистых средах: Записки научных семинаров ПОМИ, 1999. Т. 253. С. 12–136.
17. Решетников В. В. Разработка инженерных подходов к изучению интерференционных волновых полей, возбуждающихся в пачках тонких упругих слоев. (II). (Численные методы оценки полей. Краткий обзор получаемых результатов.) // Интерференционные волны в слоистых средах: Записки научных семинаров ПОМИ, 1999. Т. 253. С. 162–244.
18. Крауклис П. В., Крауклис А. П., Фатъянов А. Г. Резонансные волны в средах с ослабленными границами // Записки научных семинаров ПОМИ, 2008. Т. 354. С. 150–156.