

Д. М. Молодцов, Ю. В. Рослов

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ ВРЕМЕН В ТРЕХМЕРНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРИАНГУЛЯЦИОННОЙ НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКИ

### Введение

При решении прямых задач сейсморазведки и сейсмологии возникает задача, заключающаяся в нахождении кинематических параметров волн, наиболее общая формулировка которой дается уравнением эйконала:

$$|\nabla\tau(\vec{x})| = \frac{1}{v(\vec{x})}, \quad \tau(\vec{x}_0) = \tau_0, \quad \vec{x} \in \mathbf{R}^3, \quad (1)$$

где  $v(\vec{x})$  — скорость распространения упругих волн в среде;  $\tau(\vec{x})$  — поле времен, или эйконал. Уравнение (1) является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных, при произвольной зависимости  $v(\vec{x})$  его решение может быть получено с помощью численных методов, как правило, использующих сеточное разбиение модели среды [5].

Можно выделить два типа расчетных сеток: регулярные и нерегулярные. Алгоритмы на регулярных сетках [3, 6], отличаются сравнительной экономичностью вычислений и простотой реализации. В то же время регулярные сетки плохо аппроксимируют среды со сложнопостроенной геометрией границ раздела, и в данном случае их использование сопряжено либо со значительным увеличением ошибки, либо со значительным увеличением вычислительной сложности вследствие измельчения сетки. Нерегулярные сетки позволяют работать с моделями среды с достаточно сложной геометрией, содержащими границы раздела произвольной формы. Например, в работе [1] рассматривается двумерная задача с использованием нерегулярного разбиения на трапеции, что позволяет моделировать непересекающиеся криволинейные границы.

Среди всех кусочно-линейных нерегулярных разбиений наибольшей гибкостью обладают триангуляционные сетки — разбиения пространства на симплексы. Для трехмерного пространства симплексом является тетраэдр. Оптимальной при аппроксимации частных производных является такая триангуляция заданного множества точек, симплексы которой ближе всего к правильным [7]. Из комбинаторной топологии известно, что этому требованию удовлетворяет триангуляция Делоне, обладающая рядом замечательных свойств [7]. Задача построения триангуляции Делоне возникает во многих приложениях, алгоритмы, решающие эту задачу в 2D- и 3D-вариантах, хорошо разработаны.

В настоящей работе для генерации сетки была использована некоммерческая библиотека текстов программ TetGen, в которой реализовано построение триангуляции Делоне замкнутой трехмерной области и улучшение качества сетки.

Предлагаемый алгоритм основан на поиске кратчайшего пути во взвешенной графе с интерполяцией. Применение теории графов основано на замене уравнения (1) эквивалентной вариационной задачей нахождения экстремалей функционала Ферма для множества точек  $M$  (поля экстремалей):

$$\tau = \int_{M_0}^M \frac{ds}{v(\vec{x})},$$

где  $ds$  — элемент кривой, соединяющей точку источника  $M_0$  и точку  $M$  [5].

Пусть дан взвешенный граф без ребер отрицательного веса, содержащий  $n$  узлов; кратчайшим путем называется последовательность ребер с минимальным суммарным весом. Алгоритм, находящий кратчайший путь из узла  $N_0$  графа в узел  $N$ , известен как алгоритм Дейкстры. При этом нахождение одного кратчайшего пути требует столько же времени, сколько и нахождение кратчайших путей из  $N_0$  во все узлы графа: для разреженного графа  $O(n^2)$  или  $O(n \log n)$  (в зависимости от используемого алгоритма сортировки) [6].

Пусть для имеющейся модели среды построена тетраэдрическая сетка, скорость постоянна внутри каждого тетраэдра. Узлы графа располагаются в вершинах и на серединах ребер тетраэдров. Каждому узлу ставится в соответствие булева переменная: узел может быть *открытым* либо *закрытым*. Точечный источник для простоты располагается в узле  $S$ . Время в  $S$  инициализируется как  $\tau_0$ , время в остальных узлах инициализируется как бесконечность, а сами узлы помечаются как открытые. Множество открытых узлов, которых уже достиг волновой фронт, образует *очередь*. На каждом шаге алгоритма, пока множество открытых узлов не пусто, находим в очереди узел  $i$  с минимальным временем, помечаем его как закрытый и исключаем из очереди. Перебираем все элементы, окружающие узел  $i$ . Для каждого  $j$ -го тетраэдра перебираем все узлы, принадлежащие тетраэдру, присваиваем каждому  $k$ -му узлу значение времени

$$\tau_k = \min\left\{\tau_k, \tau_i + \frac{r_{ik}}{v_j}\right\}, \tag{2}$$

где  $r_{ik}$  — евклидово расстояние между узлами с индексами  $i$  и  $k$ ;  $v_j$  — скорость в тетраэдре, и если они еще не находятся в очереди, помещаем их туда. После этого снова находим в очереди узел с минимальным временем.

В работе [6] показано, что точность расчета поля времен является квадратичной формой пространственного и углового разрешения. Пространственное разрешение определяется размером ячеек сетки, угловое разрешение — числом сегментов лучей, проходящих через ячейку. Чтобы добиться достаточного углового разрешения, не увеличивая очень сильно число узлов графа, применяется интерполяция поля времен на гранях тетраэдров. Аналогичный подход использован в работах [1, 3]. В общем случае некоторые узлы тетраэдра, содержащего текущий узел  $i$ , уже являются закрытыми. Если закрыты три коллинеарных узла, соответствующее ребро считается закрытым, если закрыты шесть компланарных узлов, закрытой считается соответствующая грань. На новой закрытой грани после перехода к двумерной системе координат  $(u, w)$ , связанной с гранью, вводится расчетная сетка второго порядка, на которой осуществляется

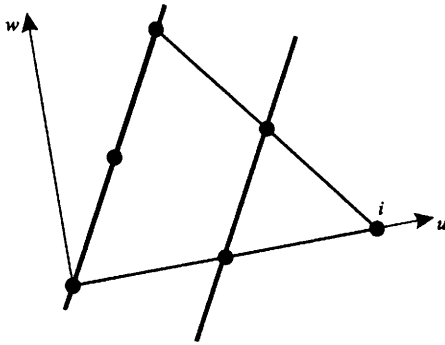


Рис. 1. К определению базисных функций

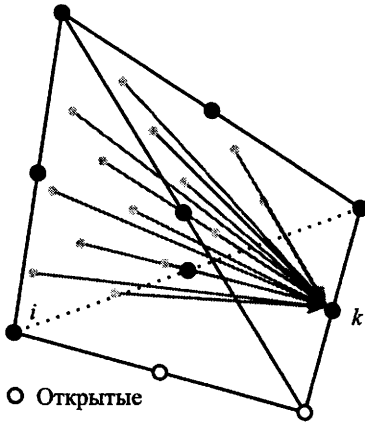


Рис. 2. Схема локального решения в случае закрытия одной грани

грань, через которую в этот узел должен прийти оптимальный луч. Поэтому на каждом шаге сегменты лучей проводятся, в том числе, и в закрытые узлы. Если закрытый узел получает меньшее время, он снова назначается открытым и возвращается в очередь. Алгоритм завершается, когда все узлы переходят во множество закрытых.

Описанный алгоритм был реализован в виде программного обеспечения. Для выяснения точности и производительности алгоритма было проведено тестирование на простых моделях. Для рассчитанных значений поля времен  $\tau_i$  на узлах сетки вычислялась относительная ошибка  $\delta\tau_i = \frac{\tau_i - \tau(\vec{x}_i)}{\tau(\vec{x}_i)} 100\%$ , где  $\tau(\vec{x})$  — аналитическое решение.

Первая модель представляет собой куб с ребром 1 км со скоростью 1 км/с, разбитый регулярной сеткой. Точечный источник помещен в центре куба. Объем тетраэдров

интерполяция биквадратичным полиномом

$$t(u, w) = \sum_{i=1}^6 \tau_i \phi_i(u, w),$$

где  $\tau_i$  — значения эйконала в узлах грани;  $\phi_i(u, w)$  — соответствующие базисные функции. Базисные функции имеют вид

$$\phi_i(u, w) = \frac{L_{i,1}(u, w)}{L_{i,1}(u_i, w_i)} \frac{L_{i,2}(u, w)}{L_{i,2}(u_i, w_i)},$$

где

$$L_{i,j}(u, w) = (u - u_{j1})(w_{j2} - w_{j1}) - (w - w_{j1})(u_{j2} - u_{j1})$$

— уравнения прямых, проходящих через узлы  $(u_{j1}, w_{j1})$  и  $(u_{j2}, w_{j2})$ , которые выбираются так, чтобы прямые проходили через все узлы кроме  $i$  (рис. 1).

С учетом интерполяции (2) заменим следующим выражением:

$$\tau_k = \min \left\{ \tau_k, t_1 + \frac{r_{1k}}{v_j}, \dots, t_p + \frac{r_{pk}}{v_j} \right\},$$

где  $p$  — число узлов сетки второго порядка;  $t_q$  — значение интерполянта в узле (рис. 2).

В алгоритме Дейкстры, если узел получил статус закрытого, для него найден кратчайший путь, что позволяет навсегда исключить его из рассмотрения. Однако при использовании сетки второго порядка в областях с большой кривизной волнового фронта возможна ситуация, когда узел закрывается раньше, чем

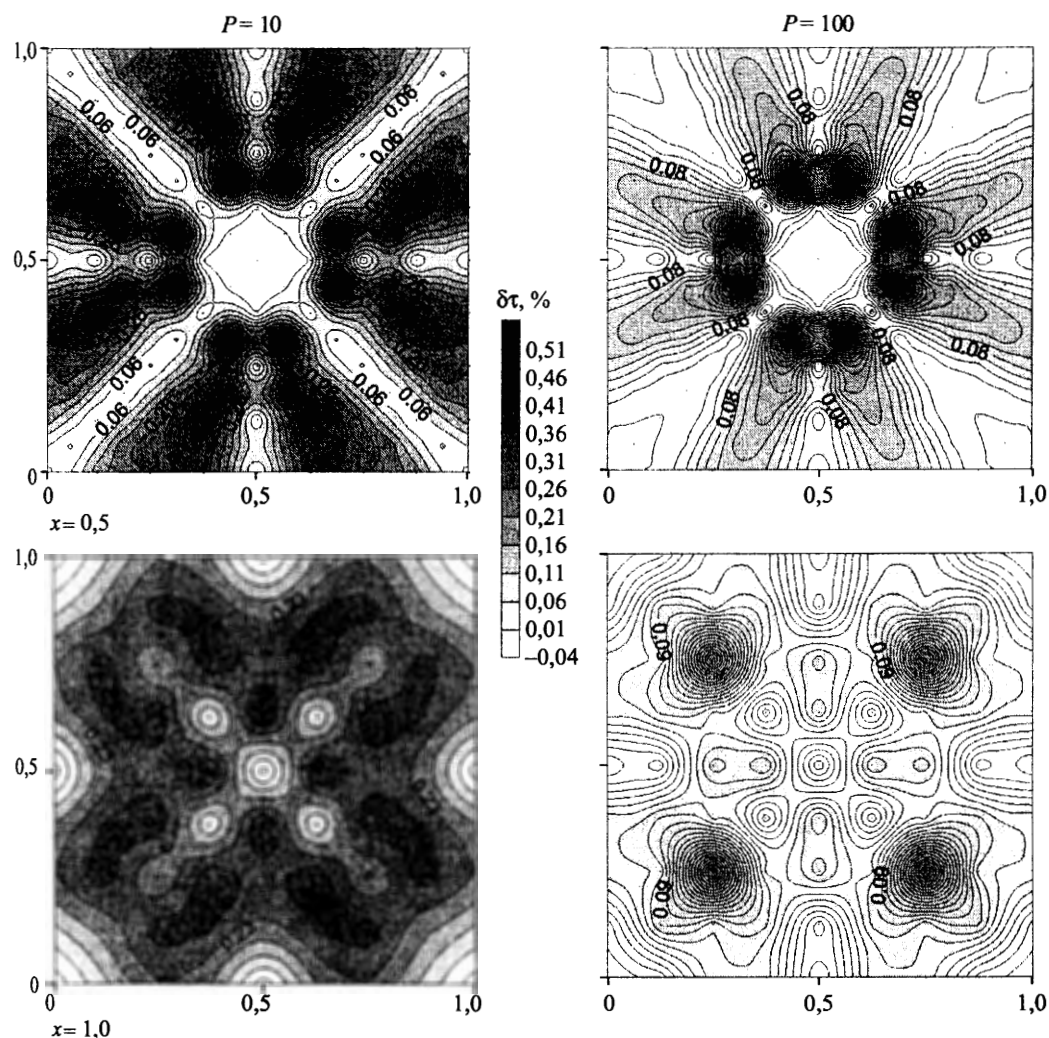


Рис. 3. Относительная ошибка (%) для однородной модели и регулярной сетки.  $\Delta V \approx 0,0003 \text{ км}^3$ ,  $P = 10, P = 100$ . Сечения  $x = 0,5 \text{ км}, x = 1 \text{ км}$

$\Delta V \approx 0,0003 \text{ км}^3$  (3072 тетраэдра). Сетка второго порядка с постоянным числом узлов на грани  $P(P+1)/2$ , где  $P$  — число узлов на ребре. Распределение ошибки приведено на рис. 3. Поскольку среда однородна, ошибка наследует симметрию сетки. Минимальные значения ошибки соответствуют направлениям через главные и побочные диагонали (оптимальный луч проходит точно через узлы) и узлам, имеющим общую ячейку с источником. Максимумы, расположенные в 24 узлах в окрестности источника, связаны в первую очередь с сильным влиянием интерполяции; ошибка «разносится» по лучам, проходящим через эти узлы. При  $P=10$  средний модуль ошибки составил 0,18%, максимальная ошибка 0,52%. При увеличении углового разрешения до  $P=100$  средний модуль ошибки составил 0,07%, максимальная ошибка 0,42%.

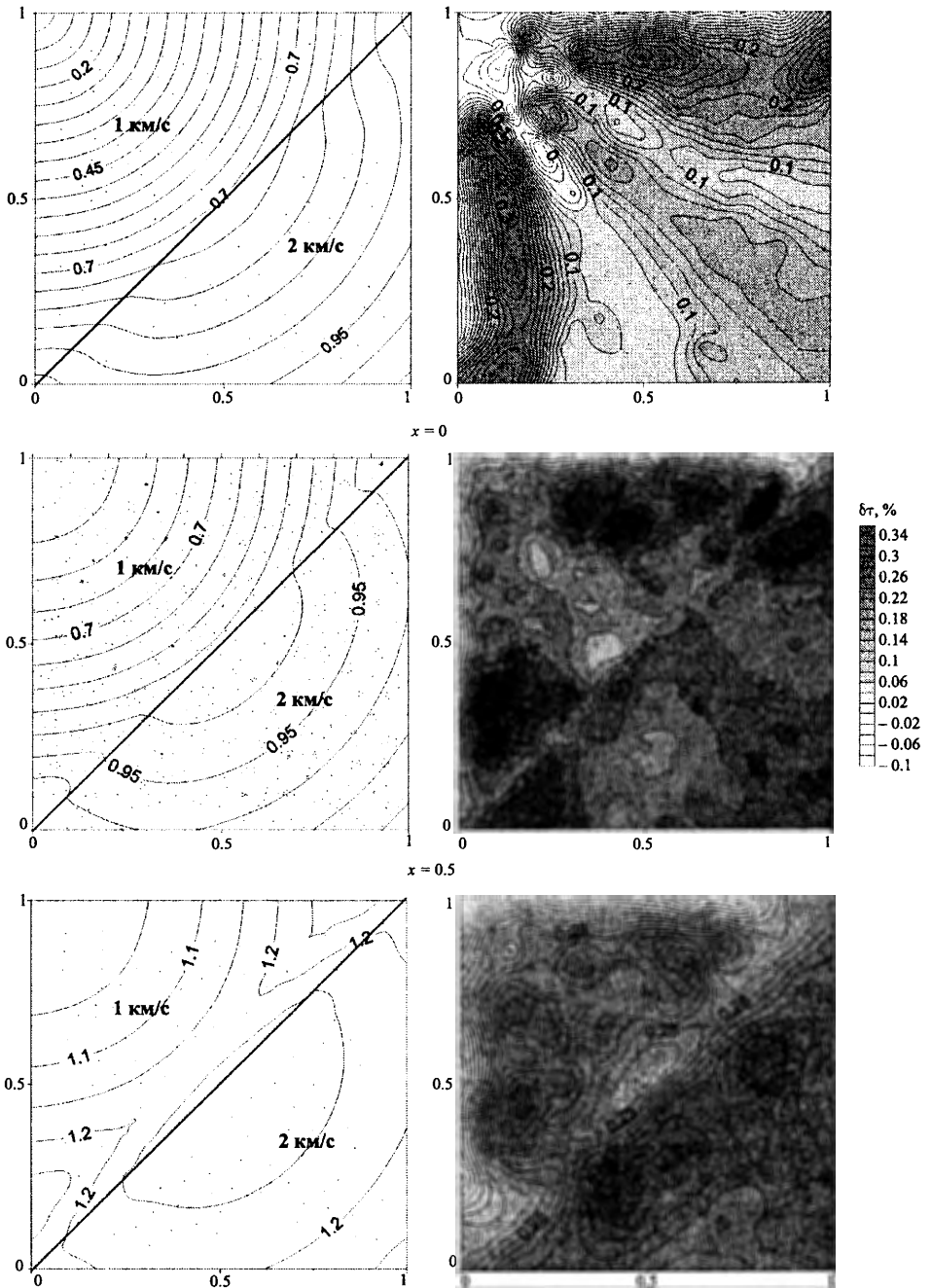


Рис. 4. Поле времен и относительная ошибка (%) в сечениях  $x = 0 \text{ км}$ ,  $x = 0,5 \text{ км}$ ,  $x = 1 \text{ км}$  для модели наклонной границы полупространств. Источник в точке  $(0, 0, 1)$ . Нерегулярная сетка,  $\Delta V_{\max} = 0,0001 \text{ км}^3$ ;  $\Delta P = 0,008 \text{ км}$ ;  $t_{CPU} = 14, 25 \text{ с}$

Далее был проведен тест для плоской наклонной границы полупространств с большим контрастом скоростей (1 км/с в верхнем полупространстве и 2 км/с в нижнем). Источник располагается в верхнем полупространстве. Объем модели 1 км<sup>3</sup>. Максимальный объем тетраэдров  $\Delta V_{\max}=0,0001$  км<sup>3</sup>, сетка второго порядка с постоянным шагом  $\Delta P=0,008$  км. Средний модуль ошибки в нижнем полупространстве составил 0,34%, максимальная ошибка 0,99%. Распределение ошибки приведено на рис. 4. Для той же модели была построена регулярная сетка, аппроксимирующая наклонную границу «ступеньками», как если бы использовалось разбиение на кубы. При тех же параметрах сетки средний модуль ошибки в нижнем полупространстве составил 2,5%.

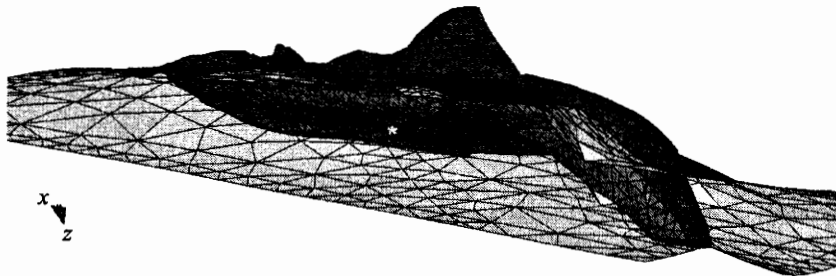


Рис. 5. Поверхности сглаженной версии SEG/EAGE Salt Model. \* — источник

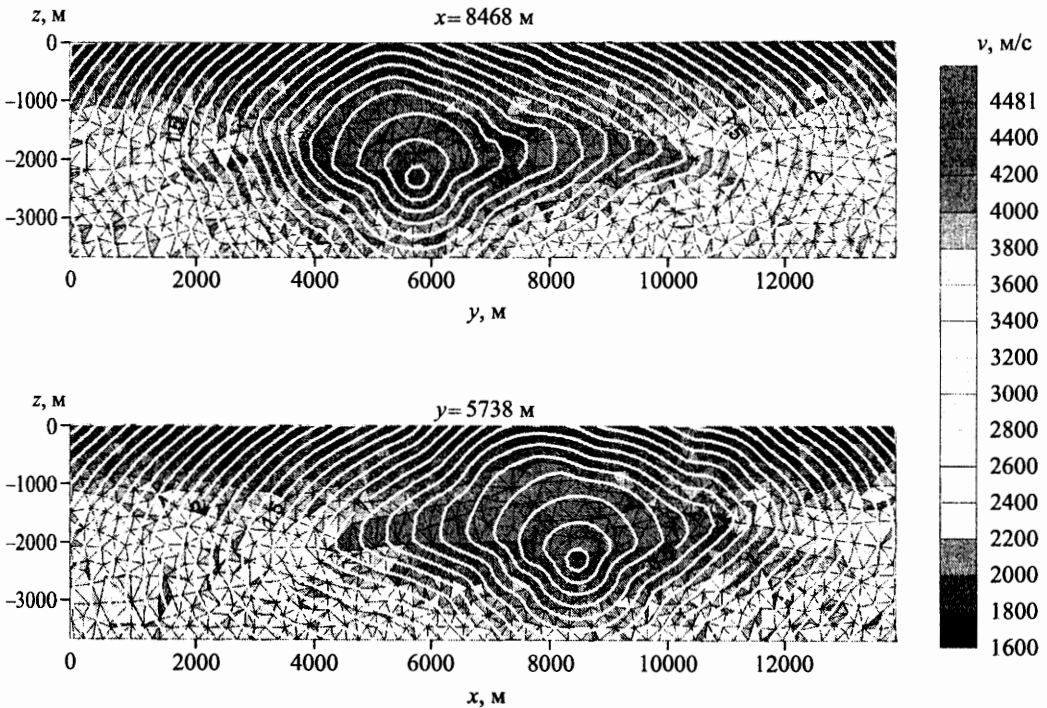


Рис. 6. Поле времен, рассчитанное для SEG/EAGE Salt Model. Сечения проходят через источник

Также было рассчитано поле времен для классической модели SEG/EAGE Salt Model. Оригинальная модель для конечно-разностного моделирования волнового поля содержит тонкие слои, что делает ее непригодной для кинематического моделирования. Поэтому использовалась сглаженная версия модели, аналогичная рассмотренной в работе [4]. Сглаженная модель содержит три основных блока, на границах которых скорость претерпевает разрыв: соляное тело с постоянной скоростью и два градиентных блока вмещающих пород, скорость в которых контролируется давлением: гидростатическим в верхнем и литостатическим в нижнем блоке (рис. 5). Координаты источника были взяты из классического набора данных, озаглавленного «Phase A Acquisition» (источник в скважине на глубине 2300 м) [2]. Параметры сетки:  $\Delta V_{\max} = 3 \cdot 10^6 \text{ м}^3$ ,  $P = 10$ . Результаты моделирования поля времен приведены на рис. 6.

Оценим сложность алгоритма. Пусть  $n$  — число узлов главной сетки,  $p$  — среднее число узлов сетки второго порядка на грани. Наиболее затратной частью алгоритма является поиск в очереди узла с минимальным временем. Нахождение одного узла требует  $O(n)$  арифметических операций, всего за время работы алгоритма  $O(n^2)$  операций. Биквадратичная интерполяция имеет линейную сложность:  $O(p)$ , т.е. всего для алгоритма:  $O(np)$ . Пренебрегая возможным повторным включением узлов в очередь, получаем грубую оценку сложности алгоритма  $O(n(n+p))$ . Существенная оптимизация может быть достигнута при помощи использования эффективного алгоритма сортировки очереди, например пирамидальной сортировки, сложность которой составляет  $O(n \log n)$  [6]. На рис. 7 приведена оценка производительности по результатам тестирования.

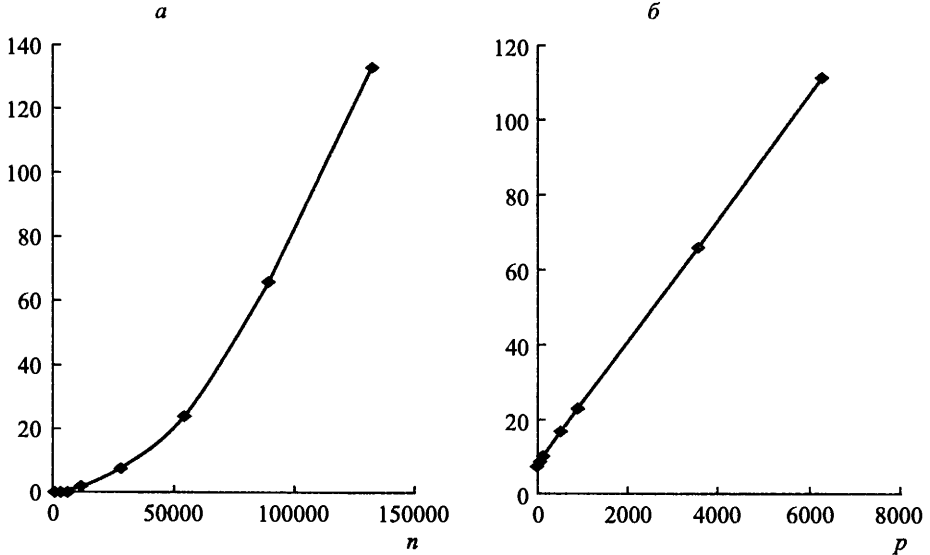


Рис. 7. Зависимость процессорного времени  $t_{CPU}$  от числа узлов  $n$  основной сетки (а) и от среднего числа узлов  $p$  сетки второго порядка (б) по результатам тестирования. Тактовая частота 1,7 ГГц

Использование нерегулярной сетки позволяет рассматривать границы раздела произвольной формы, что особенно важно при моделировании вторичных волн: голов-

ных, отраженных, обменных. Обобщение алгоритма на вторичные волны сводится к созданию новой очереди после расчета первичного поля и инициализации узлов, принадлежащих границе, от которой рассчитывается вторичное поле. Добиться высокой точности при сохранении приемлемых машинного времени и памяти позволяет использование формального алгоритма интерполяции. Такой подход, разумеется, является компромиссным, поскольку интерполяция приводит к некоторой потере точности. Влияние интерполяции наиболее существенно в окрестности источника.

#### Указатель литературы

1. *Всемирнова Е. А.* Двумерное лучевое трассирование на нерегулярной сетке // Российский геофизический журнал. 2004. № 35. С. 4–7.
2. *Aminzadeh F. et al.* Three dimensional SEG/EAGE models – an update // The Leading Edge, 1996. Feb. P. 131–134.
3. *Bai C., Greenhalgh S., Zhou B.* 3D ray tracing using a modified shortest-path method // Geophysics, 2007. V. 72. P. T27–T36.
4. *Bucha, V.* Ray tracing computations in the smoothed SEG/EAGE Salt Model // Seismic Waves in Complex 3-D Structures, Report 13. 2003. P. 241–248.
5. *Klimes L., Kvasnicka M.* 3-D network ray tracing // Geophys. J. Int., 1994. V. 116. P. 726–738.
6. *Moser T. J.* Shortest paths calculation of seismic rays // Geophysics, 1991. V. 56. P. 59–67.
7. *Si H., Gartner K.* Meshing piecewise linear complexes by constrained Delaunay tetrahedralizations // Proceedings of 14th International Meshing Roundtable, Springer-Verlag, 2005. P. 147–164.